KANTONSSCHULE LUZERN **MATURA 2008** **MATHEMATIK**
baf, fke, scm, spp 6Kc, 6Lb, 6Wbc, 6Rc Grundlagenfach

Resultate

Aufgabe 1

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-4x+\frac{88}{3}$

Aufgabe 2

a) $6x + 3y + 2z - 28 = 0$ b) $59.04°$

c) $73.40°$ d) $6x + 3y + 2z - 98 = 0$

Aufgabe 3

a) $A = \frac{1}{3}t^{\frac{2}{3}}$ b) $V_{rot} = \frac{2}{15}\pi t^{\frac{5}{2}}$

c) $V_{rot} : V_{zyl} = \frac{1}{4}\pi t^{\frac{5}{2}} : \frac{2}{15}\pi t^{\frac{5}{2}} = 15 : 4$, also (unabhängig von t

Aufgabe 4

a)

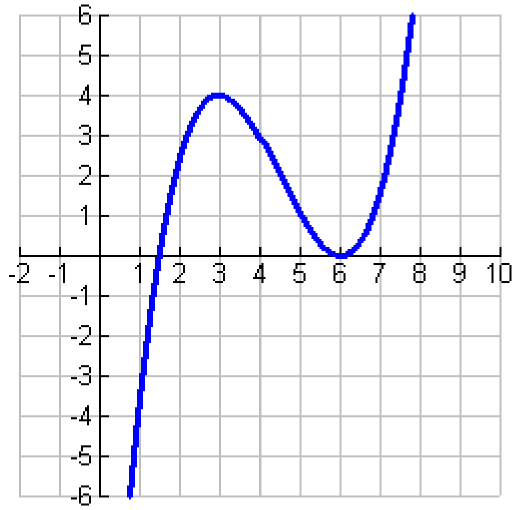
Nullstellen: 1.5 und 6

Extremalpunkte:
Hochpunkt H(3 / 4), Tiefpunkt T(6 / 0)

Wendepunkt W(4.5 / 2)

Punktsymmetrie bzgl. W(4.5 / 2)

b)



c) $F = \frac{81}{8}$

d) $g_2(x)=\frac{8}{27}x^3-4x^2+16x-16=f(x)$

e) k = +6 oder k = –6

Aufgabe 5

a) Anzahl Wahlmöglichkeiten: **189**

b) P(erste Wahl) = **0.792** / P(zweite Wahl) = **0.196** / P(dritte Wahl) = **0.012**

c) P(A) = **0.071307** / P(B) = **0.465160**

d) **Fr. 15.15**

KANTONSSCHULE LUZERN Grundlagenfach

MATURA 2008 6Ka / 6Kb / 6Ld / 6Rb / 6Re

MATHEMATIK ale / arc / asa / vou

Lösungen

Aufgabe 1

1a) $Nst: \; x = \frac{1}{t} \; oder \; x = 0$; $Extremalpunkte: H\left(\frac{1}{3t} / \frac{8}{27t^3}\right); T\left(\frac{1}{t}/0\right)$; $Wendepunkt: W\left(\frac{2}{3t}/\frac{4}{27t^3}\right)$

1b) $t = \frac{1}{2}$

1c) $R\left(\frac{\sqrt{111}+12}{6} / \frac{\sqrt{111}+144}{36}\right) \approx (3.756/4.293)$; $Q\left(\frac{-\sqrt{111}+12}{6} / \frac{-\sqrt{111}+144}{36}\right) \approx (0.244/3.707)$

1d) $Punkt\ P(1.5/6.75)$; $Fläche\ A_{\max} = \frac{81}{16} = 5.0625$

Aufgabe 2

2.1 a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$; D(–7.6 / 17.8 / 0)

2.1 b) F(10/11 / 7.5) ; G(0.4/23.8 / 7.5)

2.1 c) $\alpha = 45^o$

2.1.d) $J(6/8/12.5)$; $V_{Haus} = 1600$

2.2) $\frac{5\sqrt{3}}{3} \le s \le 5\sqrt{3}$

2.3.a) $E_{BCF}: 4x + 3y - 73 = 0$

2.3.b) $Lichtstrahl: \vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1.6 \\ 8.8 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

3a) Nullstellen : $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$; Extremalpunkt : P(2 / 2) = Maximum

3b1) A $= \frac{12\sqrt{3}}{5}$ 3b2) m ≈ 0.49

3c) Hohlraum (in %) $= \frac{7}{16} \approx 0.4375$

Aufgabe 4

4a) p(4x schwarz) = $\approx 0,2508$

b) p(min. 2x weiss) $= \frac{131}{243} \approx 0,5391$

c) min. 15 x

d) p(zweimal gleiche Farbe) $= \frac{31}{105} \approx 0,2952$

e) p(schwarz/weiss | verschiedene Farben) $= \frac{12}{37} \approx 0,3243$

f) E(x) $= \frac{8}{5} = 1,6$ schwarze Kugeln

Aufgabe 5

5.1) b = $\sqrt[4]{192} \approx$ 3.72 ; h = $\sqrt{3}$ – 1 ≈ 0.73 , A ≈ 8.8

5.2) a) Anzahl Fälle = $8^{12} = 6,782 \cdot 10^{10}$ Möglichkeiten

b) Anzahl Fälle $== 495$ Möglichkeiten

c) Anzahl Fälle = $= 6,4665 \cdot 10^8$ Möglichkeiten

Lösung Aufgabe 1

a) $\underline{\underline{E:\ x+2y+2z-12=0}}$

b) $\underline{\underline{S\left(\frac{12}{5}/\frac{12}{5}/\frac{12}{5}\right)}}$

c) $\underline{\underline{\alpha \approx 108.435°}}$

d) $\underline{\underline{d=d\left(P,E\right)=6}}$

e) $\underline{\underline{\overline{AD}=\overline{BC}}}$

f) $\underline{\underline{A\left(Trapez\right)=40.5}}$

Lösung Aufgabe 2

a) Nullstellen: $\underline{\underline{N_1\left(-1/0\right)\quad N_2\left(2/0\right)}}$

Extremalstellen: Hochpunkt $\underline{\underline{H\left(\approx 3.30/\approx 0.21\right)}}$

Tiefpunkt $\underline{\underline{T\left(\approx -0.30/\approx -2.17\right)}}$

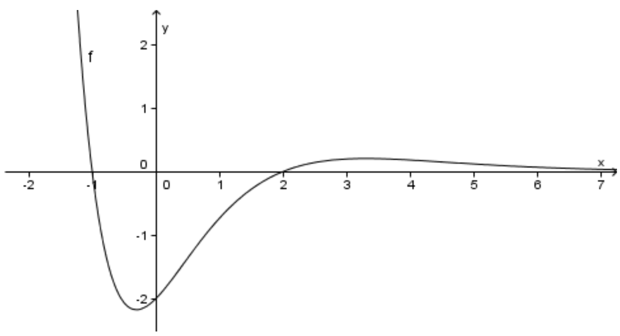
Wendepunkte: $\underline{\underline{\text{Wendepunkt } W_1\left(\approx 4.56/\approx 0.15\right)}}$

$\underline{\underline{\text{Wendepunkt } W_2\left(\approx 0.44/\approx -1.45\right)}}$

Symmetrien: $f\left(-x\right)\neq \pm f\left(x\right)\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{keine Symmetrie}}}$

Asymptoten: $\underline{\underline{\text{x-Achse}}}$ für $x\to\infty$

Graph:



b) $\underline{\underline{A=\frac{5}{e^2}\approx 0.68}}$

c) $\underline{\underline{V=\frac{3\pi\left(e^6-7\right)}{4e^4}\approx 17.11}}$

d) $\underline{\underline{g\left(x\right)=\frac{1}{8}x^3-\frac{7}{8}x^2+x-2}}$

Lösung Aufgabe 3

a) Wendetangente: $\underline{\underline{t: y = -\frac{1}{3}x}}$

b) $\underline{\underline{\varphi = 90°}}$

c) $\underline{\underline{A_u = \frac{5}{4}k^3 \quad A_o = \frac{3}{4}k^3 \qquad A_u : A_o = 5:3}}$

d) $\underline{x_1 = 0 \quad x_2 = 3}$ $\underline{\underline{\text{unabhängig von k!}}}$

$\underline{\underline{\text{Minimaler Flächeninhalt } A_{\min} = 4.5 \text{ für } k = 1.}}$

Lösung Aufgabe 4

a) $P(X = 50) = \underline{\underline{6.5\%}}$

b) Es müssen also mindestens $\underline{\underline{\text{11 Buchungen}}}$ vorgenommen werden.

c) $P(\text{"Bustour wird gebucht"}) = \underline{\underline{37.7\%}}$

d)

$i)$ Erwartete Anzahl Tage mit keiner Einladung: $\underline{\underline{\text{23 oder 24 Tage}}}$

$ii)$ $P(\text{"mehr als 4 Einladungen"}) \approx \underline{14.28\%}$

Erwartete Anzahl Tage mit mehr als 4 Einladungen: $\underline{\underline{\text{52 Tage}}}$

Kurzlösungen

Aufgabe 1

a) **C(-4 / -2 / 10)**

b) **E:** $-x + 7y + 5z - 40 = 0$

c) **D(-6 / 12 / 5)**
$V = \frac{1}{2} \cdot 1125 = 562.5$

d) Winkel zwischen **n** und **v**(DA) $\approx$ **35.264°**

e) Ebene steht senkrecht auf der xy-Ebene
Schnittgerade: $\mathbf{r} = [2, 6, 0] + t\,[4, -3, 5]$

Aufgabe 2

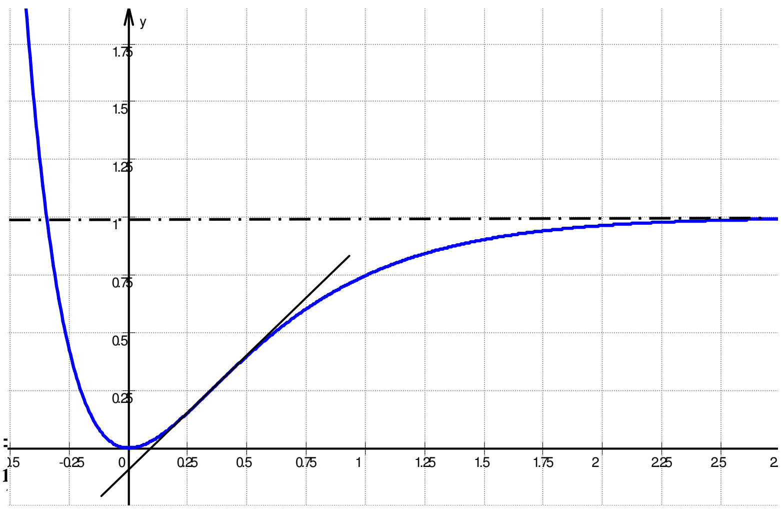
$$O(x) = 2\pi x\left(z + \tfrac{13}{24}x\right) = \pi\left(\tfrac{29}{36}x^2 + \tfrac{2784}{x}\right) = \frac{29\pi(x^3 + 3456)}{36x}$$

Radius $x = 12$

Dachhöhe $h = 5$

$O_{min} = 348\pi$

Aufgabe 3



a) $f_1(x) = (1 - e^{-2x})^2 = f(x)$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Extrema: $f'(x) = 0$
$f''(0) = 8 > 0$
$y = f(0) = 0$

Wendepunkte $f''(x) = 0$
$f'''(\frac{1}{2}\ln(2))$
$f(\frac{1}{2}\ln(2)) =$

Wendetangente: $m = f'(\frac{1}{2}\ln(2)) = 1$ $y - \frac{1}{4} = x - \frac{1}{2}\ln(2)$
$y = x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln(2) \approx x - 0.097$

b) k: $y = w(x) = e^{-4x}$

c) Volumen

$V = \ = \frac{11\pi}{24}$

Lösungen

Aufgabe 4

a) $P(X{=}k) = \binom{12}{k} 0.25^k\ 0{,}75^{12-k}$ $\quad$ k = 0,1,2,..12 $\quad$ **Binomial - Verteilung**

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=k)	0.031	0.127	0.232	0.258	0.194	0.103	0.040	0.011	0.0024	0.0004	0.00004	$2\ 10^{-6}$	$6\ 10^{-8}$

E(X) = 3

b) $P(A|\,m) = \frac{P(A \wedge m)}{P(m)} = \frac{P(m\,|\,A)P(A)}{P(m)} \quad \approx\ 0.324$

c) P(mind. eins von C) = 1 – P(keins von C) = $1 - \frac{\binom{35}{11}\binom{60}{0}}{\binom{95}{11}} = \frac{78\,602\,333}{78\,602\,753} \approx 0.9999947$

P(X ≤ 4 Geräte von M) = $\sum_{k=0}^{4} \frac{\binom{35}{k}\binom{60}{11-k}}{\binom{95}{11}} = \frac{2\,582\,607}{4\,136\,987} \approx 0.624$

Aufgabe 5

a) Gegeben ist die Funktion f: $x \mapsto \frac{1}{2x+3}$

Vermutung: $f^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\, 2^n\, (2x+3)^{-(n+1)}$

IV: $\quad$ n = 0 (1) $\quad f(x) = (-1)^0\, 0!\, 2^0\, (2x+3)^{-(0+1)} = (2x+3)^{-1}$ *richtig* $\quad f'(x) = (-1)^1\, 1!\, 2^1\, (2x+3)^{-(1+1)} = -2\,(2x+3)^{-2}$ *richtig*

IA: $\quad f^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\, 2^n\, (2x+3)^{-(n+1)}$

IS: $\quad$ Zu zeigen ist: $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\, (n+1)!\, 2^{n+1}\, (2x+3)^{-(n+2)}$

$f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]' = (-1)^n\, n!\, 2^n\, (-(n+1))\, 2\, (2x+3)^{-(n+2)} = (-1)^{n+1}\, (n+1)!\, 2^{n+1}\, (2x+3)^{-(n+2)}$

w.z.z.w

b) Minimaltransversale: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) c1) $\quad$ 286

c2) $\quad$ 166

6. Differentialgleichungen (10 Punkte)

a) Differentialgleichung für: $t \to v(t)$

$$\frac{dv}{dt} = -\,k\sqrt[3]{v^2} = -k\,v^{\frac{2}{3}}$$

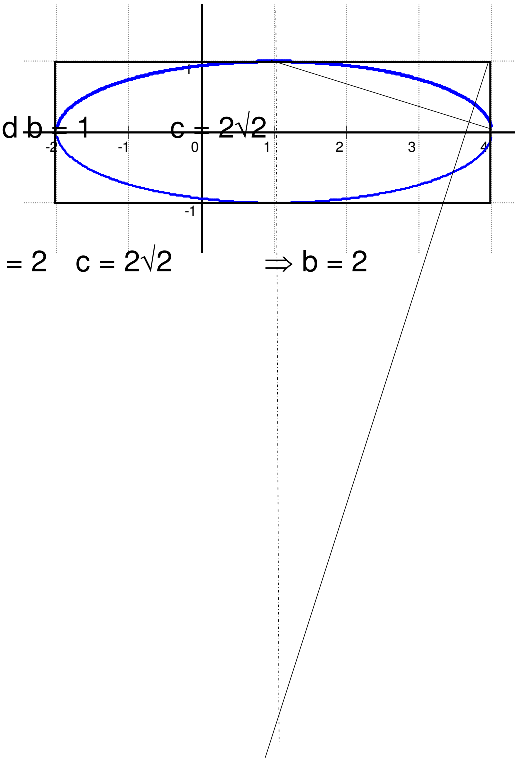
$v(t) = (5 - \frac{1}{3}k\,t)^3$

b) **$k = \frac{75}{16} \approx 4.69$** $\Rightarrow$ $v(t) = \left(5 - \frac{75}{48}t\right)^3$

c) Maximales g :

$$a = \frac{dv}{dt} = -\,k\sqrt[3]{v^2} = -k\,v^{\frac{2}{3}}\Big|_{t=0} = \frac{1875}{16} \approx 117.2 \quad \approx \quad \mathbf{11.7\ g}$$

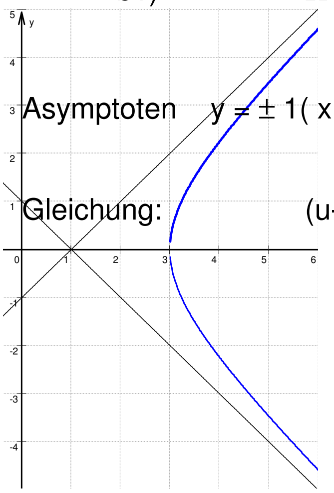
7. Komplexe Funktion (10 Punkte)



a) $\frac{(u-1)^2}{9} + v^2 = 1$ Ellipse M(1/0) a = 3 und b = 1 c = $2\sqrt{2}$

b)

b1) $\mathbb{K}$ ' rechter Hyperbelast mit M(1/0) a = 2 c = $2\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ b = 2



Asymptoten $y = \pm\, 1(x-1)$

Gleichung: $(u-1)^2 - v^2 = 4$

b2) 2 Halbgeraden $y = \pm\, x$

b3)

$P(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}) = P(\frac{1}{2}(7+3i))$

8. Statistischer Test (10 Punkte)

a) **Hypothesen:** **H_0** : $p_0 = p_1 = 20\,\%$ **Nullhypothese** möchte man verwerfen

Wahrscheinlichkeit, dass eine Lampe eine kleinere Ersparnis als 85% leistet ist 0.2.

d.h. Die Qualität ist ist erfüllt

H_1 : $p_1 > p_0 = 20\%$ **Alternativhypothese** möchte man annehmen

Wahrscheinlichkeit, dass eine Lampe eine kleinere Ersparnis als 85% leistet, ist grösser als 0.2.

d.h. Die Qualität ist nicht erfüllt.

b) **Test - Verteilung unter H_0:**

$$P(\mathbf{T}= X= x) = \frac{\binom{3000}{x}\binom{12000}{100-x}}{\binom{15000}{100}} \qquad x= 0,1,2....,100$$

$P(\mathbf{T}= X \geq 25) \approx 0.0866 > 5\%$ $\qquad$ $P(\mathbf{T}= X \geq 26) \approx 0.0552 > 5\%$

$$P(\mathbf{T}= X \geq 28) = 1 - \sum_{k=0}^{27} P(X=k) = 1 - \sum_{k=0}^{27} \frac{\binom{3000}{k}\binom{12000}{100-k}}{\binom{15000}{100}} \approx 0.0337 \approx 4\%$$

Signifikanzgrenze: $T_{0.95} = 28$

Signifikantsgrenze $T_{0.95} = 28$

Ist $T \geq 28$ so kann man die Lieferung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.0337$ fälschlicherweise ablehnen.

Es ist $T = 29 > T_{0.95} = 28$ $\Rightarrow$ Die Stadt muss die Lieferung nicht akzeptieren.

Der Anteil mangelhafter Lampen ist signifikant grösser als 20%

c) $$P(\mathbf{T}= X \geq 29) = 1 - \sum_{k=0}^{28} P(X=k) = 1 - \sum_{k=0}^{28} \frac{\binom{3000}{k}\binom{12000}{100-k}}{\binom{15000}{100}} \approx 0.0197 \approx 2\%$$

d) **H_1** : $p_1 = 30\% > p_0 = 20\%$

$$\beta = P(\mathbf{T}= X < 28) = \sum_{k=0}^{27} P(X=k) = \sum_{k=0}^{27} \frac{\binom{4500}{k}\binom{10500}{100-k}}{\binom{15000}{100}} \approx 0.296 \approx 23\,\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass man die Lieferung fälschlicherweise nicht zurück weist und annimmt, der Anteil mangelhafter Sparlampen ist höchstens 20% obwohl der Anteil 30% ist, ist 0.23.