KANTONSSCHULE LUZERN MATURA 2002
EFAM / arc

Ergänzungsfach
Anwendungen der Mathematik

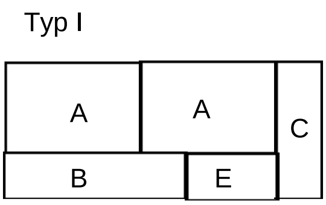
Zeit: 180 Minuten

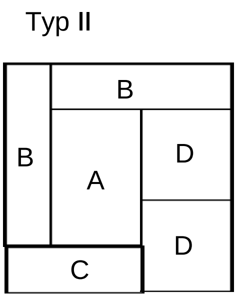
Hilfsmittel: Formelsammlung DMK
TI-92 mit Handbuch
Laptop für GEOMETRY

Jede Aufgabe wird mit der gleichen Punktzahl bewertet. Die Lösungen müssen ausführlich hergeleitet werden. Der Einsatz des TI-92 ist klar anzugeben.
Die vier am besten gelösten Aufgaben werden gewertet. Vier vollständig gelöste Aufgaben ergeben die Note 6.

Aufgabe 1

Eine Schreinerei kauft bei einem Sägewerk Holzplatten vom Typ I und vom Typ II, die sie für einen Auftrag auf die folgende Weise in Stücke verschiedener Grösse zerschneidet:





Für den Auftrag werden mindestens
100 Stücke der Grösse A,
120 Stücke der Grösse B,
80 Stücke der Grösse C,
40 Stücke der Grösse D benötigt.
Nicht benötigte Platten werden gelagert, es können aber nicht mehr als 160 Stücke der Grösse D und nicht mehr als 50 Stücke der Grösse E gelagert werden.
Der Preis einer Platte des Typs I beträgt 300 Fr. und der einer Platte des Typs II 200 Fr..

Wie viele Platten vom Typ I und vom Typ II müssen gekauft werden, damit der Auftrag ausgeführt werden kann und der Gesamteinkaufspreis so gering wie möglich wird?

a) Beschreiben Sie das Problem mit Ungleichungen, zeichnen Sie das Planungspolygon und bestimmen Sie die optimale Lösung und den Einkaufspreis. 9P

b) Der Einkaufspreis der Platte vom Typ II verändert sich auf p Fr. Der Einkaufspreis der Platte vom Typ I bleibt 300 Fr. Für welche Werte von p bleibt die optimale Lösung die gleiche wie bei a)? 3P

Aufgabe 2

Raumgeometrie mit GEOMETRY

Gegeben: Punkt A und Gerade g(P,Q)
Gesucht ist ein möglichst kleines reguläres Tetraeder ABCD mit der Ecke B auf g. Es soll so um die Kante AB gedreht sein, dass die Ecke C in der Aufrissebene $\pi 2$ liegt.

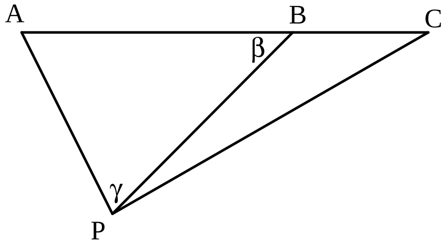
a) Skizzieren Sie die räumliche Situation und beschreiben Sie die wesentlichen Schritte des Lösungsweges. 6P

b) Lösen Sie die Aufgabe mit GEOMETRY auf dem zur Verfügung gestellten Laptop. Dokumentieren Sie den Lösungsweg mit Kommentaren. Es ist nur *eine* Lösung zu konstruieren. Die Lösung soll mit einer eigenen Farbe gezeichnet sein.
Schreiben Sie Ihren Namen in die Datei und speichern Sie die Lösung regelmässig unter dem Namen *Lösung.geo* . 6P

Aufgabe 3

Im Gelände liegen die drei Punkte A, B, C auf einer geraden Strasse mit $\overline{AB} = 540$ m und $\overline{BC} = 325$ m .

a) Für einen Punkt P kennt man
$\beta = \sphericalangle\ PBA = 52{,}5°$ und $\overline{PA} = 435$ m .
Der Winkel $\gamma = \sphericalangle\ APB$ sei spitz.
Bestimmen Sie $\overline{PB}$ und $\overline{PC}$.

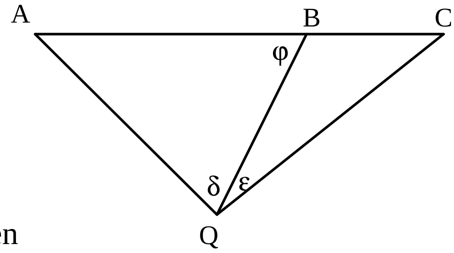


5P

b) Von einem Punkt Q aus peilt man die Punkte A, B, C an und misst die Winkel
$\delta = \sphericalangle\ AQB = 48{,}33°$ und $\varepsilon = \sphericalangle\ BQC = 31{,}5°$.

b1) Es sei $x = \sin\varphi$, $\varphi = \sphericalangle\ ABQ$.
Drücken Sie $\overline{QA}$ und $\overline{QC}$ mit x aus.

b2) Stellen Sie eine Gleichung auf für x und berechnen Sie mit der Lösung $\overline{QA}$ und $\overline{QC}$.



7P

Aufgabe 4

Eine Hyperbel mit Mittelpunkt O(0/0) hat den Scheitelpunkt $S_1(4/0)$ und den Brennpunkt $F_1(5/0)$.

a) Stellen Sie eine Gleichung der Hyperbel auf und skizzieren Sie den rechten Ast der Kurve mit Asymptoten. Einheit: 1 cm 4P

b) Gesucht sind Hyperbelpunkte P im Abstand 4.0 cm vom Brennpunkt F_1 .
Zeigen und beschreiben Sie, wie man die Punkte P konstruieren kann. 2P

c) Die Hyperbel soll so um den Ursprung O(0/0) mit positivem Drehwinkel gedreht werden, dass sie die x-Achse als Asymptote hat.
Bestimmen Sie eine Gleichung der gedrehten Hyperbel. 6P

Aufgabe 5

In einem Gewässer werden 450 Fische einer speziellen Art ausgesetzt. Die Populationsgrösse p(t) kann durch Zählung nach t Monaten bestimmt werden. Mit verschiedenen Modellen soll die Entwicklung der Populationsgrösse beschrieben werden.

a) Erstes Modell: *Vermehrung ohne äussere Einflüsse*
Die Wachstumsrate sei proportional zur Populationsgrösse mit Proportionalitätsfaktor λ .

a1) Stellen Sie die Differentialgleichung auf und lösen Sie sie allgemein.

a2) Bestimmen Sie den Proportionalitätsfaktor λ gerundet auf 3 Nachkommastellen, wenn nach einem Monat 510 Fische gezählt werden.

a3) Berechnen Sie p(6) und p(12) und skizzieren Sie die Lösungsfunktion für $0 \le t \le 12$.
Einheiten: x-Achse: 1H. $\hat{=}$ 1 Monat, y-Achse: 1H. $\hat{=}$ 100 Fische 6P

b) Zweites Modell: *Vermehrung und Abwanderung*
Die Vermehrung verlaufe wie unter a) mit dem unter a2) berechneten Faktor λ. Zusätzlich wird angenommen, dass pro Monat k Fische (k konstant) das Gewässer verlassen.

b1) Stellen Sie die Differentialgleichung auf und bestimmen Sie für $k = 30$ und $k = 60$ je die Lösungsfunktion.

b2) Berechnen Sie für $k = 30$ und $k = 60$ je p(6) und p(12) und skizzieren Sie die Kurven ins gleiche Koordinatensystem wie bei a).

b3) Für welche Werte von k nimmt die Populationsgrösse p(t) ab? Bestimmen Sie dann die Zeit T ausgedrückt mit k, bis zum Aussterben der Population. 6P