KANTON
LUZERN

Bildungs- und Kulturdepartement
Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2024

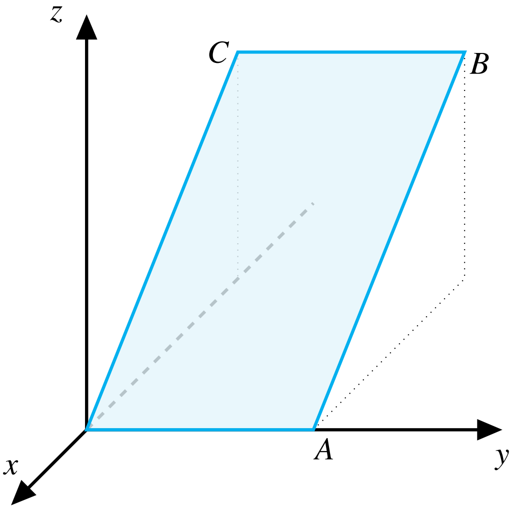
Fach	Mathematik Grundlagenfach
Prüfende Lehrperson/en	Kathrin Schalbetter kathrin.schalbetter@sluz.ch Eliza Sienkiewicz eliza.sienkiewicz@sluz.ch Philipp Spindler philipp.spindler@sluz.ch Roel Zuidema roel.zuidema@sluz.ch
Klasse/n	G20e, G20g, T19a, T19b
Prüfungsdatum	Fr, 24.05.2024
Prüfungsdauer	3 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel	• Formelsammlung «Formeln, Tabellen, Begriffe», DMK • Taschenrechner TI-30X Pro (ohne Handbuch)
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	• Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. • Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden und muss einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. • Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften. • Der Einsatz der Hilfsmittel ist klar anzugeben.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 12 Aufgabe 2: 8.5 Aufgabe 3: 5 Aufgabe 4: 9.5 Aufgabe 5: 10 Total: 45 Die Note 6 wird für mindestens 40 Punkte erteilt, die Note 4 für mindestens 23 Punkte.
Anzahl Seiten	5 Seiten (inkl. Titelblatt)

....
Name, Vorname Klasse Nummer

	a	b	c	d	e	
Aufgabe 1: Vektorgeometrie	3	1.5	1	4	2.5	**12 Punkte**

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0\,|\,60\,|\,0)$, $B(-80\,|\,60\,|\,60)$ und $C(-80\,|\,0\,|\,60)$ gegeben. Gezeichnet ist das Rechteck $OABC$ in einem Koordinatensystem.

a) Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C bestimmt wird.
Warum ergibt sich aus der Koordinatengleichung die besondere Lage von E, wie sie in der Zeichnung dargestellt ist?
(falls Sie keine Koordinatengleichung für E herleiten konnten, rechnen Sie mit $E: 3x+4z=0$ weiter)



b) Berechnen Sie die Grösse des Winkels φ, unter dem E die xy-Ebene schneidet.

c) Weisen Sie nach, dass der Koordinatenursprung O mit den Punkten A, B und C ein Rechteck $OABC$ festlegt.

Das Rechteck $OABC$ ist das Modell eines steilen Hanggrundstücks. Die positive x-Achse beschreibt die südliche, die positive y-Achse die östliche Himmelsrichtung.
Im Koordinatensystem: 1 LE entspricht 1 m, d. h. die Länge des Grundstücks in West-Ost-Richtung beträgt 60 m.
Ein Hubschrauber überfliegt das Grundstück entlang einer Linie, die im Modell durch die Gerade

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

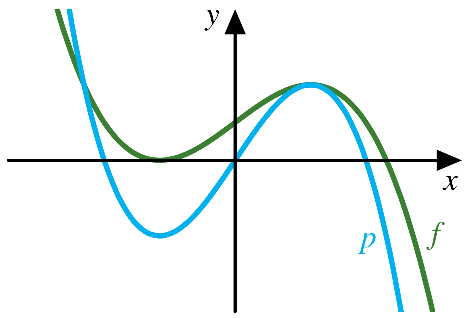
d) Weisen Sie nach, dass
   i. der Punkt $P(-20\,|\,40\,|\,40)$ von der Ebene E den Abstand 20 m hat.
   ii. der Hubschrauber mit einem konstanten Abstand von 20 m zum Hang fliegt.

e) Im Mittelpunkt des Grundstücks wird ein Mast errichtet, der durch vier an seiner Spitze befestigte Seile gehalten wird. Die Verankerungspunkte der Seile im Grundstücksboden sind jeweils 15 m vom Mastfusspunkt entfernt und liegen von diesem aus genau in östlicher, nördlicher, westlicher und südlicher Richtung. Bestimmen Sie im Modell die Koordinaten des östlichen und nördlichen Verankerungspunkts V_O bzw. V_N.

Aufgabe 2: Analysis	a	b	c	
	2.5	3	3	**8.5 Punkte**

Die Abbildung zeigt die Graphen von $p(x)$ und

$$f(x) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{4}x + 1$$



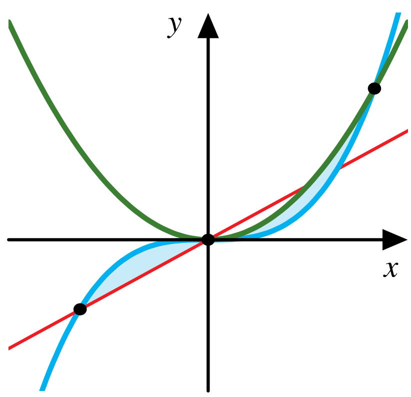
a) Bestimmen Sie alle Nullstellen und alle lokalen Extrempunkte des Graphen von f.

b) Im ersten Quadrant wird ein Rechteck eingezeichnet. Von diesem Rechteck ist der Ursprung ein Eckpunkt, zwei Seiten des Rechteckes liegen auf den Koordinatenachsen und einer der Eckpunkte liegt auf dem Graphen von f.
Bestimmen Sie den maximal möglichen Flächeninhalt des Rechteckes.

c) p ist ein Polynom dritter Ordnung, das zum Ursprung des Koordinatensystems symmetrisch ist. Der Hochpunkt von f ist auch der Hochpunkt von p.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von p.

Aufgabe 3: Analysis	**5 Punkte**

Die Abbildung zeigt Ausschnitte der Graphen der Funktionen $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$ und $h(x) = k \cdot x$. Wie gross muss k gewählt werden, damit die Inhalte der beiden eingefärbten Flächen gleich gross sind?



	a	b	c	d	e	
Aufgabe 4: Analysis	4	1.5	1	1.5	1.5	**9.5 Punkte**

In dieser Aufgabe erforschen Sie die Funktion $k(x) = (1-x)\cdot e^x$.

a) Bestimmen Sie vom Graphen von k die Nullstelle, den Extrempunkt (Hoch- oder Tiefpunkt?) und den Wendepunkt.

b) Die negative x-Achse ist eine Asymptote von k. Dies muss nicht gezeigt werden. Zeichnen Sie den Graphen von k.

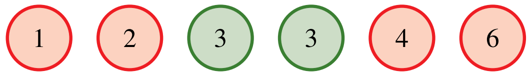
c) Unter welchem Winkel schneidet der Graph von k die x-Achse?

d) Alle Ableitungen von k haben eine Funktionsgleichung, die man in der Form $y = (a-x)\cdot e^x$ schreiben kann. Kontrollieren Sie dies bei den ersten zwei Ableitungen und benutzen Sie diese Eigenschaft zur Bestimmung einer Stammfunktion von k.

e) Ist der Inhalt der Fläche, die oberhalb der x-Achse vom Graphen von k eingeschlossen wird, begrenzt?

	a	b	c	d	e	
Aufgabe 5: Stochastik	1.5	2	2	1	3.5	**10 Punkte**

Die sechs abgebildeten Kugeln befinden sich in einer Urne.



a) Auf wie viele unterscheidbare Arten können die Kugeln aus der Urne gezogen und nebeneinander in einer Reihe angeordnet werden
   i. ohne Einschränkungen?
   ii. wobei die grünen Kugeln auf dem 2. und dem 6. Platz liegen?
   iii. mit Voraussetzung, dass die zwei grünen Kugeln immer nebeneinander liegen?

b) Wir betrachten nur die Farbe der Kugeln. Es werden nacheinander 10 Kugeln gezogen, wobei nach jedem Zug die Kugel wieder in die Urne zurückgelegt wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

   A: Genau zwei Kugeln sind grün.

   B: Nur die erste Kugel ist grün.

   C: Mindestens zwei Kugeln sind grün.

c) Wie viele Kugeln muss man aus dieser Urne mit Zurücklegen mindestens ziehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 99% erwartet werden kann, dass sich unter den gezogenen Kugeln mindestens eine grüne befindet?

d) Es werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen gezogen, wobei nur die Farbe der Kugeln eine Rolle spielt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass
   i. die zweite gezogene Kugel rot ist, wenn die erste Kugel bereits rot war?
   ii. die zweite gezogene Kugel grün ist?

e) Es werden ohne Zurücklegen zwei Kugeln aus der Urne gezogen.

   Die Zufallsgrösse X ist die Summe der Zahlen auf den gezogenen Kugeln. Nebenan ist ein Teil der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gegeben.

x	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$			$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

   i. Zeigen Sie, dass $E(X) = \frac{19}{3}$.
   ii. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (Eine oder mehrere auswählen!)
   Der Erwartungswert zeigt uns, dass
      A) nach 3 Wiederholungen im Schnitt 19 Punkte erzielt werden.
      B) mit höchster Wahrscheinlichkeit die Summe der Punkte $\frac{19}{3}$ ist.
      C) bei vielen Wiederholungen die durchschnittliche Punktesumme etwa 6.3 beträgt.

Kurzlösungen

Aufgabe 1: Vektorgeometrie

a) $E: 3x + 4z = 0$
Die allgemeine Koordinatengleichung einer Ebene im Raum lautet: $ax + by + cz + k = 0$.
da $k = 0$ folgt: Die Ebene verläuft durch den Koordinatenursprung.
da $a \neq 0$, $b = 0$ und $c \neq 0$ folgt: Die Ebene ist senkrecht zur xz-Ebene.
Die Ebene ist senkrecht zur xz-Ebene und enhält die y-Achse.

b) $\varphi = 36.87°$

c) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ und $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$

d)
i. $d(P, E) = 20$ m
ii. zu zeigen: $P \in g$ und $g \parallel E$

e) $V_O(-40|45|30)$
$V_N(-52|30|39)$

Aufgabe 2: Analysis

a) Nullstellen: $x_1 = 4$, $x_{2,3} = -2$
Extrempunkte: $T(-2|0), H(2|2)$

b) Die Fläche des Rechtecks beträgt $\dfrac{9 + 6\sqrt{3}}{4}$.

c) $p(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x$

Aufgabe 3: Analysis

Für $k = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ sind die markeirten Flächen gleich gross.

Aufgabe 4: Analysis

a) Nullstelle: $x = 1$
Extrempunkt: Hochpunkt $H(0|1)$
Wendepunktpunkt: $W(-1|\frac{2}{e})$

b) siehe Geogebra

c) $\beta = \arctan(e) = 69.80°$

d) $K(x) = (2-x) \cdot e^x$

e) Die Fläche ist begrenzt und e Quadrateinheiten gross.

Aufgabe 5: Stochastik

a) i. 360 Möglichkeiten
ii. 24 Möglichkeiten
iii. 120 Möglichkeiten

b) $P(A) \approx 0.1951$
$P(B) \approx 0.0087$
$P(C) \approx 0.8960$

c) Es müssen mindestens 12 Kugeln gezogen werden.

d) i. $P(R|R) = \frac{3}{5}$
ii. $P(RG \text{ oder } GG) = \frac{1}{3}$

e) i. $E(X) = \frac{19}{3}$
ii. Korrekt ist einzig die Aussage C.