KANTON
LUZERN

Bildungs- und Kulturdepartement
Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2024

Fach	Mathematik Grundlagenfach
Prüfende Lehrperson/en	Andreas Bolfing andreas.bolfing@sluz.ch Edoardo Sassone edoardo.sassone@sluz.ch Katrin Vock katrin.vock@sluz.ch Simon Wehrle simon.wehrle@sluz.ch
Klasse/n	G20a, G20c, G20d, G20f, G20h
Prüfungsdatum	Fr, 24.05.2024
Prüfungsdauer	3 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel	• Formelsammlung «Formeln, Tabellen, Begriffe», DMK • Taschenrechner TI-30X Pro (ohne Handbuch)
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	• Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. • Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden und muss einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. • Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften. • Der Einsatz der Hilfsmittel ist klar anzugeben.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 12 Aufgabe 2: 9.5 Aufgabe 3: 11 Aufgabe 4: 11 Total: 43.5 Die Note 6 wird für mindestens 38.5 Punkte erteilt, die Note 4 für mindestens 21.5 Punkte.
Anzahl Seiten	5 Seiten (inkl. Titelblatt)

....

Name, Vorname Klasse Nummer

	a	b	c	d	e	f	g	Punkte
Aufgabe 1 - Analysis	1	1	1.5	1.5	3	2	2	**12**

Die Gleichung des Graphen der Funktion f in Abbildung 1 lautet $y = f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte $A(0|8)$ und $B(2|0)$ auf dem Graphen der Funktion f liegen.

b) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden g, deren Graph durch die Punkte A und B führt.

c) Geben Sie die Stammfunktion von f an und berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche.

d) Unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen der Funktionen f und g im Punkt B? Den kleineren Winkel auf 2 Nachkommastellen genau angeben!

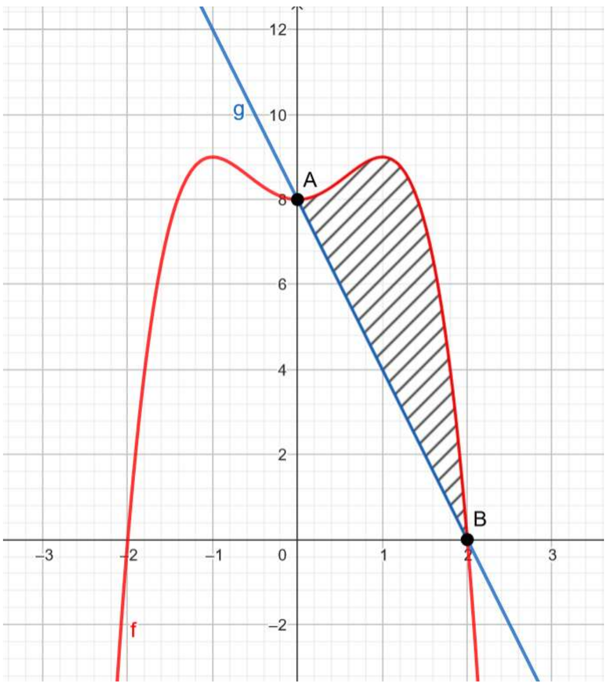


Abbildung 1

e) Bestimmen Sie rechnerisch die Extremalpunkte und Wendepunkte des Graphen der Funktion f.

f) Gemäss Abbildung 2 soll nun im Intervall $[-2,2]$ vom Ursprung O aus ein recht-winkliges Dreieck eingezeichnet werden. Wie ist die Ecke C auf der x-Achse zu wählen, so dass der Flächeninhalt maximal wird?

g) Der Graph einer Funktion
$y = p(x) = ax^4 + bx^2 + c$
führt durch den Punkt $A(0|8)$ und berührt die x-Achse im Punkt $B(2|0)$. Bestimmen Sie die Werte der Parameter a, b und c.

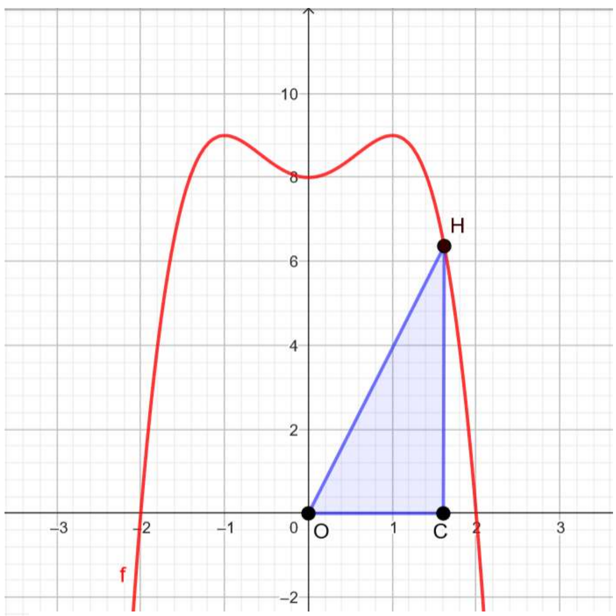


Abbildung 2

KANTON LUZERN

	a	b	c	d	e	Punkte
Aufgabe 2 - Analysis	1.5	2	3	1	2	**9.5**

1.Teil:

Die im I. Quadranten unterhalb der Kurve $y = g_t(x) = 4 - \mathrm{t} \cdot \sqrt{x}$ liegende Fläche rotiert um die x-Achse und beschreibt so einen Rotationskörper.

a) Setzen Sie $t = 2$ und berechnen Sie das Volumen des beschriebenen Rotationskörpers.

b) Für welchen Wert von $t > 0$ hat der Rotationskörper ein Volumen von $V = 24\pi$?

2.Teil:

Für $t > 0$ ist durch $y = f_t(x) = (t + 2 - t \cdot x) \cdot e^x$ eine Funktion gegeben.

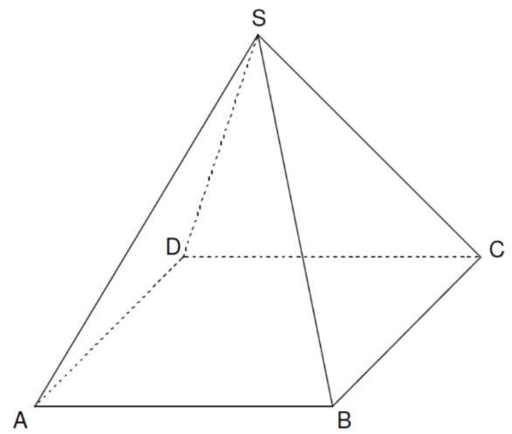
c) Setzen Sie $t = 3$ und zeigen Sie, dass $f_3'(x) = (2 - 3\mathrm{x}) \cdot e^x$ und $f_3''(x) = (-3\mathrm{x} - 1) \cdot e^x$ die ersten beiden Ableitungen von $f_3(x)$ sind.
Bestimmen Sie nun die Nullstellen, sowie Hoch- und Tiefpunkte von $f_3(x)$.

d) Zeigen Sie, dass $F_t(x) = (2t + 2 - t \cdot x) \cdot e^x + C$ Stammfunktion von $f_t(x)$ ist,
Wie muss t gewählt werden, dass die Flächenbilanz unter der Kurve f_t zwischen $x = 0$ und $x = 3$ genau -6 beträgt?

e) Zeigen Sie, dass die Kurve f_t die y-Achse für jeden Wert von t unter dem gleichen Winkel schneidet. Wie gross ist dieser Winkel?

	a	b	c	d	e	f	Punkte
Aufgabe 3 - Vektorgeometrie	2	1	2.5	2.5	1.5	1.5	**11**

Von einer vierseitigen Pyramide $ABCDS$ kennt man von der quadratischen Grundfläche $ABCD$ die Ecken $A(12|10|0), B(9|7|12), C(-2|2|8)$.



a) Zeigen Sie, dass die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ tatsächlich gleichlang und zueinander senkrecht sind.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Ecke D.

c) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Grundebene E, welche die Punkte A, B, C und D enthält.

d) Bestimmen Sie eine Spitze S einer Pyramide so, dass der Vektor $\overrightarrow{AS}$ senkrecht zur Grundfläche ist und das Volumen der Pyramide 972 Volumeneinheiten beträgt (eine Lösung genügt).

e) Sei nun S*(17|–18|1) die Spitze einer anderen Pyramide ABCDS*.
Berechnen Sie den Winkel zwischen der Kante $k = AS^*$ und der Grundebene E.
Falls Sie c) nicht lösen konnten, verwenden Sie für E die Gleichung $-8x + 16y + 2z + 1 = 0$.

f) Es treffen Sonnenstrahlen mit dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ auf die Pyramide.
Auf welchen Punkt F auf der x-z-Ebene fällt der Schatten der Spitze S^*?

KANTON
LUZERN

	a	b	c	d	e	Punkte
Aufgabe 4 - Stochastik	4	1	2	1	3	**11**

a) Bei einem Wurf mit zwei Würfeln werde die Augensumme als Ergebnis notiert.

i) Geben Sie einen Ergebnisraum Ω und seine Mächtigkeit an.

ii) Beschreiben Sie das folgende Ereignis als Teilmenge von Ω:

A = «Die Augensumme ist mindestens 10»

iii) Beschreiben Sie das Gegenereignis $\bar{A}$ mit Worten.

iv) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(\bar{A})$.

b) Fünf Würfel werden nebeneinander auf einen Tisch gelegt. Wenn du die Augenzahlen als Ziffern interpretierst, so bilden diese nebeneinander liegenden Würfel – von links nach rechts gelesen – eine fünfstellige Zahl.

i) Wie viele fünfstellige Zahlen lassen sich so bilden?

ii) Bei wie vielen dieser fünfstelligen Zahlen kommt die Ziffer 1 mindestens einmal vor?

c) Drei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

i) A = «Keine Sechs»

ii) B = «Genau eine Sechs»

iii) C = «Genau zweimal Sechs»

iv) D = «Alle drei Würfel zeigen sechs»

d) Beim Würfelspiel «Pentagramm» wird mit 3 Würfeln gespielt. Fällt eine Fünf, so erhält der Spieler 5 CHF, bei 2 Fünfen erhält der 10 CHF und bei 3 Fünfen 30 CHF. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgrösse «Auszahlung» bei diesem Spiel.

e) Wie oft muss man drei Würfel mindestens gleichzeitig werfen, damit man mit mehr als 99% Wahrscheinlichkeit wenigstens einmal drei verschiedene Augenzahlen geworfen hat?

KANTON LUZERN

	a	b	c	d	e	f	g	Punkte
Lösung Aufgabe 1 - Analysis	1	1	1.5	1.5	3	2	2	**12**

a) $f(0) = -0^4 + 2 \cdot 0^2 + 8 = 8$
$f(2) = -2^4 + 2 \cdot 2^2 + 8 = -16 + 8 + 8 = 0$

b) $y = g(x) = -4x + 8$

c) $F(x) = \frac{-x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + 8x.$

$$F = \frac{104}{15} = 6.9\overline{3}$$

d)

$\alpha = 11.65°$

e) Extremalpunkte: $T(0|8)$, $H(-1|9)$, $H(1|9)$

Wendepunkte: W($\sqrt{\frac{1}{3}}$ | $\frac{77}{9}$), W($-\sqrt{\frac{1}{3}}$ | $\frac{77}{9}$)

f) Die Ecke C muss bei $x = -\sqrt{2}$ oder $x = \sqrt{2}$ gewählt werden.

g)

$a = \frac{1}{2}$, $b = -4$, c = 8

	a	b	c	d	e	Punkte
Lösung Aufgabe 2 - Analysis	1.5	2	3	1	2	**9.5**

a) V $=\frac{32}{3}\cdot\pi$

≈ 33.51

b) $t=\frac{4}{3}$

c) t = 3: $f_3(x)=(3+2-3\cdot x)\cdot e^x=(5-3x)e^x$

Ableitungen: $f_3'(x)=(5-3x)'\cdot e^x+(5-3x)\cdot e^x$

$= -3\cdot e^x+5e^x-3x\cdot e^x = 2e^x-3x\cdot e^x$

$= (2-3x)\,e^x$

$f_3''(x)=(2e^x)'-(3x\cdot e^x)'=2e^x-[(3x)'\,e^x+3x(e^x)']$

$=2e^x-3\,e^x-3xe^x=-e^x-3xe^x$

$=(-3x-1)\,e^x$ *qed*

Nullstellen:

x = 5/3

Extremstellen: $H(\frac{2}{3}\mid 3e^{2/3})$

d) $F_t(x)=(2t+t-tx)\cdot e^x+C$

$F_t'(x)=(2t+t-tx)'\cdot e^x+(2t+t-tx)\cdot(e^x)'$

$=-t\cdot e^x+(2t+t-tx)\cdot e^x$

$=(-t+2t+2-tx)\cdot e^x$

$=(t+2-tx)\cdot e^x$

$=f_t(x)$ qed.

e) t=2

$\beta\approx 26.565°$

KANTON LUZERN

	a	b	c	d	e	f	Punkte
Lösung - Vektorgeometrie	2	1	2.5	2.5	1.5	1.5	**11**

a) Zeige, dass die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ zwei Seiten eines Quadrates sind.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Für ein Quadrat muss gelten: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ und der Winkel zwischen den beiden Vektoren muss 90° sein.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 9 + 144} = \sqrt{162}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-11)^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{121 + 25 + 16} = \sqrt{162}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = (-3) \cdot (-11) + (-3) \cdot (-5) + 12 \cdot (-4) = 33 + 15 - 48 = 0$$

b) $\vec{r}_D = \vec{r}_A + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

oder

$\vec{r}_D = \vec{r}_C - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $\mathrm{E}: 4x - 8y - z + 32 = 0$

d) S=(4|26|2) oder S=(20|-6|-2)

e) $\underline{\underline{71.57°}}$

f)

$\mathrm{F}(8; 0; -44)$

Lösung Aufgabe 4 - Stochastik	a	b	c	d	e	Punkte
	4	1	2	1	3	**11**

a) i) $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ d.h. $|\Omega| = 11$
bzw. $\Omega = \{(1,1), \ldots, (6,6)\}$ d.h. $|\Omega| = 36$

ii) $A = \{10,11,12\}$ bzw. $A = \{(6,4), (4,6), (5,5), (6,5), (5,6), (6,6)\}$

iii) $\bar{A}$ = Die Augensumme ist höchstens 9.

iv) $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, weil $A = \{(6,4), (4,6), (5,5), (6,5), (5,6), (6,6)\}$ (1.5 Punkte)
$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{5}{6}$

b) i) $6^5 = \underline{\underline{7776}}$
ii) $6^5 - 5^5 = \underline{\underline{4651}}$

c) i) $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx \underline{\underline{0.5787}}$
ii) $\binom{3}{1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \approx \underline{\underline{0.3472}}$
iii) $\binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} \approx \underline{\underline{0.0694}}$
iv) $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \underline{\underline{\approx 0.0046}}$

d) $E \approx 2.5694$

e)
Es muss mindestens 6 mal gewürfelt werden.