KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2023

Fach	Mathematik
Prüfende Lehrpersonen	Lukas Fischer lukas.fischer@sluz.ch Kathrin Schalbetter kathrin.schalbetter@sluz.ch Roel Zuidema roel.zuidema@sluz.ch
Klassen	G19d / G19l / G19m
Prüfungsdatum	26. Mai 2023
Prüfungsdauer	3 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel	• Formelsammlung «Formeln, Tabellen, Begriffe», DMK • Taschenrechner TI-30X Pro (ohne Handbuch)
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	• Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. • Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden und muss einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. • Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften. • Der Einsatz der Hilfsmittel ist klar anzugeben.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 11 Aufgabe 2: 12 Aufgabe 3: 4 Aufgabe 4: 7 Aufgabe 5: 11 Total: 45 Die Note 6 wird für mindestens 40 Punkte erteilt, die Note 4 für 23 Punkte.
Anzahl Seiten	5 (inkl. Titelblatt)

	a	b	c	d	e	
Aufgabe 1: Vektorgeometrie	2.5	1.5	1	3.5	2.5	**11 Punkte**

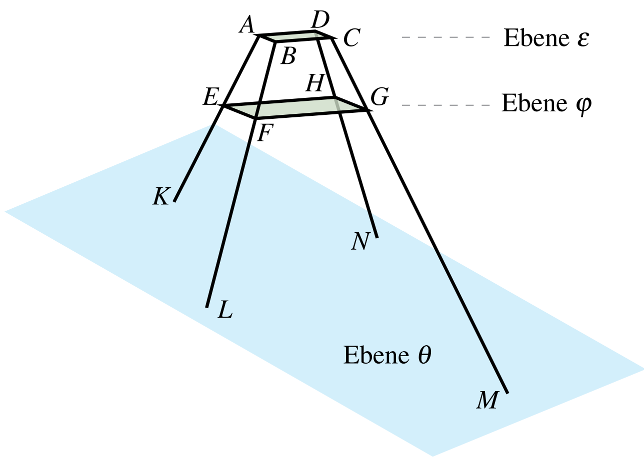
Gegeben sind die Punkte:

$A(5|12|40)$, $B(13|8|40)$, $D(11|24|40)$,
$E(-2|8|24)$, $G(26|24|24)$, $H(10|32|24)$,

wie auch die Ebene:

$$\theta : 4x + y + 8z + 294 = 0$$

Ein Aussichtsturm steht auf einer schiefen Ebene θ und besteht aus zwei parallelen Plattformen:
Plattform $ABCD$ in der Ebene ε und
Plattform $EFGH$ in der Ebene φ.
Der Turm wird getragen durch die Stützen AK, BL, CM und DN.



a) Falls die Stützen AK, BL, CM und DN verlängert werden, schneiden sie sich im Punkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S.

b) Zeigen Sie, dass gilt $\angle EHG = 90°$.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten von F so, dass $EFGH$ ein Rechteck ist.

d) Die Punkte A, B, C, und D liegen in der Ebene ε.
   i) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene ε.
   ii) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Ebenen ε und θ.

e) Der Aussichtsturm soll durch ein Eisenkabel gesichert werden, das vom Punkt E zu einem Punkt P auf der Ebene θ verläuft. Bestimmen Sie den Punkt P, sodass dieses Kabel möglichst kurz ist und bestimmen Sie diese kürzeste Länge des Kabels.

	a	b	c	d	
Aufgabe 2: Analysis	1	7.5	2	1.5	**12 Punkte**

Wir studieren die Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

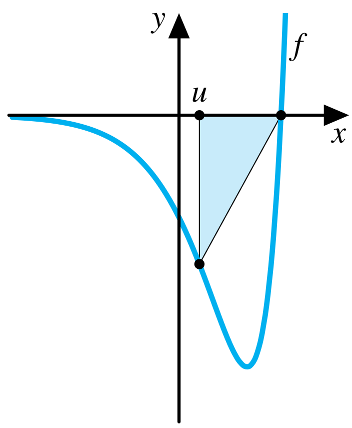
a) Zeigen Sie, dass die Funktionsgleichung von f ebenfalls geschrieben werden kann als $f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-1)^2$.

b) Zeichnen Sie ein Koordinatensystem, wobei 4 Häuschen einer Einheit entsprechen. Alle Punkte, die in dieser Teilaufgabe berechnet werden, sollten in dieses Koordinatensystem eingezeichnet werden.
   i) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte von f mit den Koordinatenachsen.
   ii) Zeigen Sie, dass die Extrempunkte bei $x = -1$, $x = 0$ und $x = 1$ sind.
   iii) Bestimmen Sie alle Extrempunkte und alle Wendepunkte und zeichnen Sie den Graphen von f.

c) Die Parabel p geht durch alle drei Extrempunkte von f. Der Scheitelpunkt von p fällt mit dem mittleren Extrempunkt von f zusammen.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von p und tragen Sie den Graphen von p ins Koordinatensystem ein.

d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche F, die im ersten Quadranten von den beiden Graphen eingeschlossen wird.

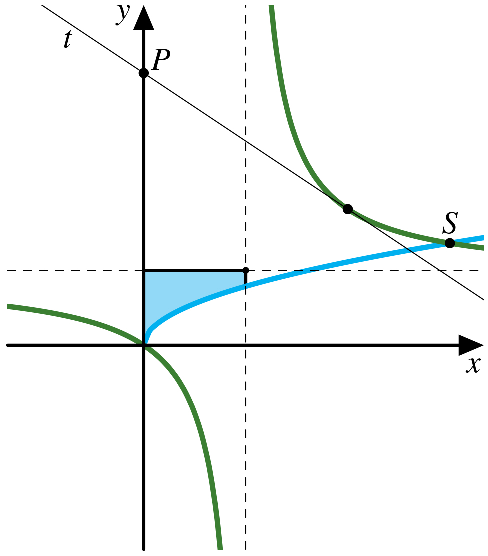
Aufgabe 3: Analysis	**4 Punkte**



Der Graph von $f(x) = (x-3) \cdot e^x$ hat eine Nullstelle.
Zusammen mit den Punkten $(u|0)$ und $(u|f(u))$ bildet diese Nullstelle ein Dreieck unterhalb der x-Achse.
Für welchen Wert u ist der Flächeninhalt des Dreiecks maximal?

	a	b	c	
Aufgabe 4: Analysis	2.5	2	2.5	**7 Punkte**

Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen
$f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = \dfrac{2x}{x-3}$



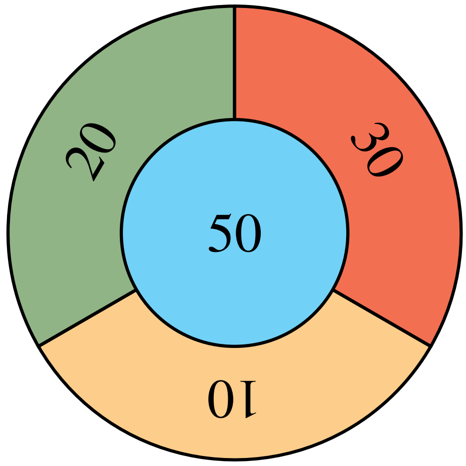
a) Bestimmen Sie algebraisch (rechnerisch) die Koordinaten des Schnittpunktes S der Graphen von f und g.

b) Zeigen Sie, dass die Tangente t an g bei $x = 6$ die y-Achse im Punkt $P(0|8)$ schneidet.

c) Der Graph von g hat sowohl eine vertikale als auch eine horizontale Asymptote. Die Fläche, die von diesen Asymptoten, der y-Achse und dem Graphen von f begrenzt wird, wird um die x-Achse rotiert. Bestimmen Sie das Rotationsvolumen des Körpers, das so entsteht.

	a	b	c	d	e	f	
Aufgabe 5: Stochastik	1.5	2	2	2	1	2.5	**11 Punkte**

Anouk und Ben liefern sich ein Dart-Duell. Dabei werfen sie Dartpfeile auf die abgebildete Scheibe.



Anouk trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 55% in das blaue Feld (50 Punkte), die anderen Felder (10, 20 und 30 Punkte) werden mit einer Wahrscheinlichkeit von je 15% getroffen. Ben hingegen trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 49% in das blaue Feld, die anderen Felder werden mit einer Wahrscheinlichkeit von je 17% getroffen. Bei allen Teilaufgaben gehen wir davon aus, dass Anouk und Ben mit jedem Pfeil die Scheibe und damit eines der vier farbigen Felder treffen.

a) Ben wirft fünf Pfeile. Wie viele Wurfbilder sind möglich,
   i) wenn man die fünf Pfeile unterscheiden kann?
      (z.B. rot | rot | gelb | blau | grün $\neq$ grün | rot | blau | rot | gelb)
   ii) wenn man die fünf Pfeile unterscheiden kann und zweimal das gelbe, zweimal das grüne und einmal das blaue Feld getroffen wird?
      (z.B. grün | blau | gelb | grün | gelb $\neq$ gelb | grün | blau | grün | gelb)
   iii) wenn man die fünf Pfeile nicht unterscheiden kann?
      (z.B. rot | rot | gelb | blau | grün = grün | blau | rot | gelb | rot)

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anouk mit drei Pfeilen 100 oder 110 Punkte erreicht?

c) Anouk wirft 20 Pfeile. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie dabei
   i) genau 8 Mal das blaue Feld trifft?
   ii) höchstens 7 Mal das blaue Feld trifft?

d) Anouk möchte mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mit mindestens einem Pfeil in das blaue Feld treffen. Berechnen Sie, wie viele Pfeile Anouk dazu mindestens schiessen muss.

e) Welche durchschnittliche Punktzahl kann Anouk bei einem Wurf erwarten?

f) Anouk und Ben spielen mehrmals das folgende Spiel: Sie werfen je einen Pfeil. Die Person, welche das Feld mit der höheren Punktzahl trifft, gewinnt. Der Gewinner des Spiels erhält die geworfenen Punkte (gewinnt z.B. Ben mit rot, dann erhält er 30 Punkte). Der Verlierer erhält keine Punkte. Werfen beide in dasselbe Feld, erhalten beide keine Punkte. Welchen Punktegewinn kann Ben im Durchschnitt pro Spiel erwarten?

Kurzlösungen

Aufgabe 1: Vektorgeometrie

a) $S(12|16|56)$

b) $\overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} -12 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

c) $F(14|0|24)$

d) i) $\varepsilon : z = 40$

ii) $\alpha = 27.27°$

e) $P(-26\,|\,2\,|-24)$

$d = \left|\overrightarrow{PE}\right| = 54$

Aufgabe 2: Analysis

a) $f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-1)^2 = (x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

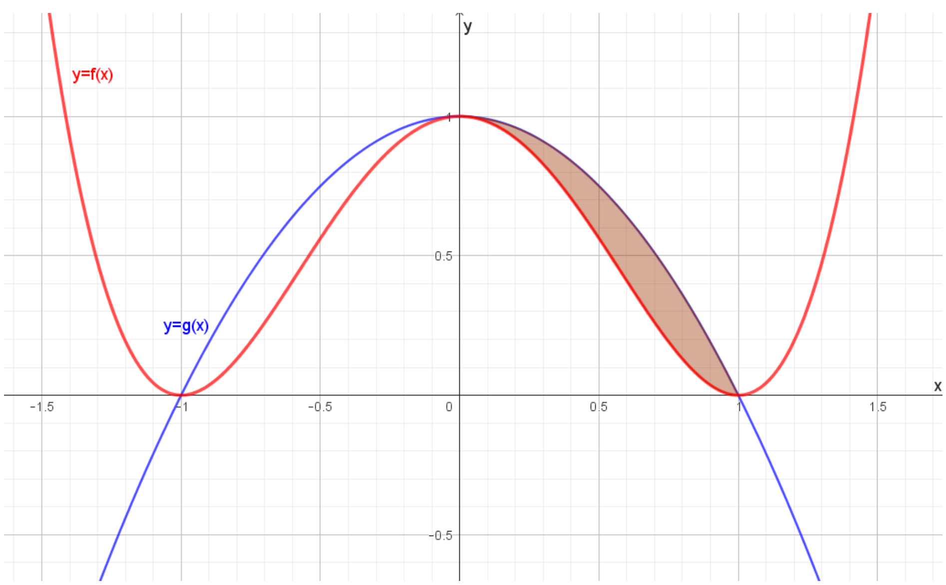
b) Nullstellen: $N_1(-1|0)$, $N_2(1|0)$

y-Achsenabschnitt: $B(0|1)$

Extrema: $H(0|1)$, $T_1(-1|0)$, $T_2(1|0)$

Wendepunkte: $W_1(-0.58|0.44)$, $W_2(0.58|0.44)$

Graph:



c) $p(x) = -x^2 + 1$

d) $F = \dfrac{2}{15}$

Aufgabe 3: Analysis

Fläche: $A(u) = -\frac{1}{2} \cdot \left(u^2 - 6u + 9\right) \cdot e^u$

Die Fläche des Dreiecks wird für $u = 1$ maximal.

Aufgabe 4: Analysis

a) Schnittpunkt: $S(9|3)$

b) $t(x) = -\frac{2}{3}x + 8$

c) vertikale Asympotote: $x = 3$

horizontale Asympotote: $y = 2$

Volumen: $\pi \int_0^3 2^2\,dx - \pi \int_0^3 \left(\sqrt{x}\right)^2\,dx = \frac{15}{2}\pi \approx 23.56$

Aufgabe 5: Wahrscheinlichkeit

a) i) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024$

ii) $\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$

iii) $\binom{5+4+1}{5} = \binom{8}{5} = 56$

b) $100 = 20 + 30 + 50 \quad \leftarrow \quad 3! = 6$ Möglichkeiten

$110 = 10 + 50 + 50 \quad \leftarrow \quad \frac{3!}{2} = 3$ Möglichkeiten

$110 = 50 + 30 + 30 \quad \leftarrow \quad \frac{3!}{2} = 3$ Möglichkeiten

$P(100 \text{ Punkte oder } 110 \text{ Punkte}) = 0.2475$

c) i) $P(X = 8) = \binom{20}{8} \cdot 0.55^8 \cdot 0.45^{12} = 0.073$

ii) $P(X \leq 7) = \sum_{i=0}^{7} \binom{20}{i} \cdot 0.55^i \cdot 0.45^{20-i} = 0.058$

d) Anouk muss mindestens 6 Mal einen Pfeil schiessen.

e) $E(X) = 36.5$ Punkte

f) $E(\text{Punktegewinn von Ben}) = 0 \cdot 10 + 0.0255 \cdot 20 + 0.051 \cdot 30 + 0.2205 \cdot 50 = 13.065$ Punkte