

Schriftliche Maturitätsprüfung 2023

Fach	Grundlagenfach Mathematik
Prüfende Lehrpersonen	Anja Handschin anja.handschin@sluz.ch Claudia Sänger claudia.saenger@sluz.ch Philipp Spindler philipp.spindler@sluz.ch
Klassen	G19a, G19f, G19h, G19k
Prüfungsdatum	26. Mai 2023
Prüfungsdauer	3 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel	<ul style="list-style-type: none"> • Formelsammlung „Formeln, Tabellen, Begriffe“, DMK • Taschenrechner TI-30X Pro (ohne Handbuch)
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	<ul style="list-style-type: none"> • Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. • Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden und muss einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. • Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften. • Der Einsatz der Hilfsmittel ist klar anzugeben.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 12.5 Aufgabe 2: 12 Aufgabe 3: 10.5 <u>Aufgabe 4: 10</u> Total: 45 Die Note 6 wird für mindestens 40 Punkte erteilt, die Note 4 für mindestens 23.5 Punkte.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	5

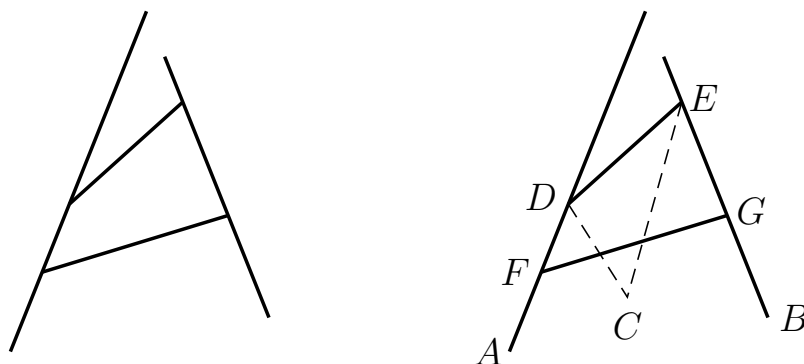
.....
Name, Vorname

.....
Klasse

.....
Nummer

	a	b	c	d	e	
Aufgabe 1: Vektorgeometrie	2.5	3	2.5	1.5	3	12.5 Punkte

Eine Maturaklasse plant, als Abschluss ihrer Schulzeit ein Denkmal in den Pausenhof zu setzen. Es soll ein künstlerisch stilisiertes A für "Alpenquai" sein, das schräg auf ein Podest mit einer schiefen Ebene gestellt werden soll. Der Entwurf für das A sieht folgendermassen aus (im Bild links):



Um das Logo noch interessanter zu gestalten, sollen in dem 3-dimensionalen Modell die verschiedenen Stangen, die dabei verwendet werden, nicht zwingend alle in einer Ebene liegen. Zur Erhöhung der Stabilität werden noch zwei zusätzliche Streben (DC und EC , im Bild rechts) aus einem durchsichtigen Kunststoffmaterial eingefügt, wobei der Punkt C ebenso wie die Punkte A und B auf der schiefen Ebene des Podests liegt.

Betrachtet man nun die Ebene des Pausenhofs als xy -Ebene, so haben die Punkte folgende Koordinaten:

$$A(4 \mid -8 \mid 4), B(4 \mid 8 \mid 4), C(-8 \mid 4 \mid 7), D(4 \mid -4 \mid 7), E(1.5 \mid 3 \mid 9)$$

- a) Bestimmen Sie eine Parameterform und eine Koordinatenform der schiefen Ebene S durch die Punkte A , B und C , auf der das Modell steht.

(Falls Sie die Ebenengleichung nicht bestimmen können, verwenden Sie im Folgenden die Gleichung $S : x + 4z = 20$)

- b) Die Punkte A und D liegen auf der Geraden g , die Punkte B und E auf der Geraden h . Geben Sie die beiden Geradengleichungen an und bestimmen Sie die Lage der zwei Geraden zueinander.
- c) Die zweite Querlatte FG mit $G(2.75 \mid 5.5 \mid 6.5)$ ist so platziert, dass F der Mittelpunkt der Strecke AD ist. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes F . Zeigen Sie sodann, dass der Punkt $H(3.5 \mid -1.4 \mid 5.9)$ auf der Geraden FG liegt, und ermitteln Sie, in welchem Verhältnis der Punkt H die Strecke \overline{FG} teilt.
- d) Berechnen Sie den Winkel, in dem die Stützstrebe CD auf die Ebene S auftrifft.
- e) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes E von der Ebene S .

	a	b	c	d	e	
Aufgabe 2: Analysis I	4	1	1.5	3.5	2	12 Punkte

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^2 - x$.

- a) Berechnen Sie die Nullstellen von f und die Koordinaten der Extrempunkte der Funktion f . Begründen Sie jeweils, ob es sich bei den Extremstellen um ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum handelt.

Zeichnen Sie anschliessend den Graphen von f (1 Einheit = 2 Häuschen).

- b) Berechnen Sie alle Stellen, an denen der Graph von f die Steigung -1 aufweist.
- c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f an der Stelle $x = 4$.
- d) Gesucht ist eine Polynomfunktion 4. Grades. Diese Funktion g soll die folgenden Eigenschaften aufweisen:

An den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$ befinden sich die beiden Nullstellen der Funktion. Die Steigung der Tangente an der Stelle 0 hat den Wert -4 . Des Weiteren gilt $g''(2) = 3$. Zudem liegt der Punkt $P(2 | -7)$ auf dem Graphen der Funktion.

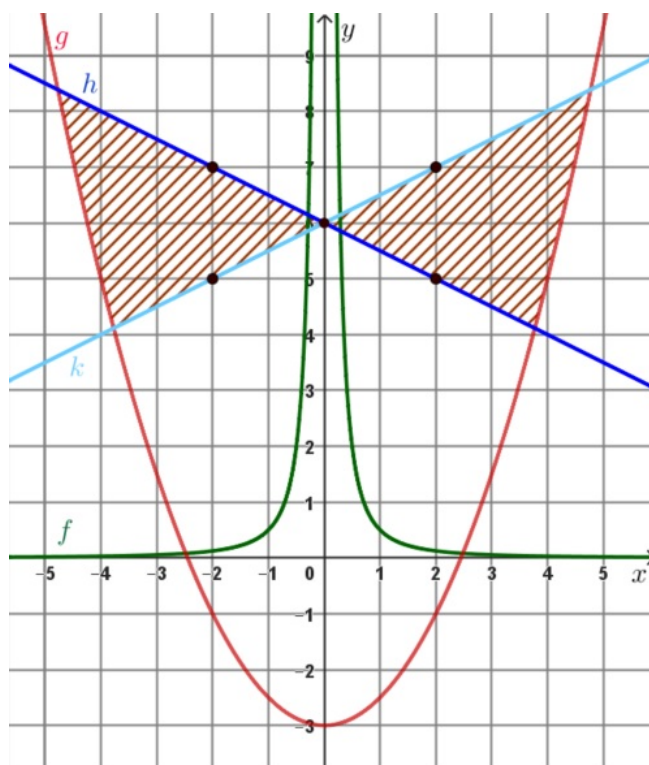
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g .

- e) Im 4. Quadranten gibt es eine Stelle, an der die Differenz $d(x) = f(x) - g(x)$ maximal wird. Berechnen Sie diese Stelle und die zugehörige Differenz.

(Benutzen Sie $g(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{11}{2}x$, falls Sie die Teilaufgabe d) nicht vollständig lösen konnten.)

	a	b	c	d	e	
Aufgabe 3: Analysis II	1	2	3	2.5	2	10.5 Punkte

Betrachten Sie die folgende Figur:



- a) Gezeichnet sind die Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{2x^2}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$.
Bestimmen Sie anhand der Zeichnung die Funktionsgleichungen der beiden Geraden h und k .
- b) Berechnen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstückes, das der Graph der Funktion g mit der x -Achse einschliesst.
- c) Berechnen Sie den Inhalt der beiden schraffierten Flächen (= Augen der Figur).
- d) Der Graph von f und die x -Achse begrenzen über dem Intervall $[1, \infty)$ eine Fläche. Zeigen Sie, dass diese Fläche einen endlichen Inhalt hat und berechnen Sie diesen.
- e) Bestimmen Sie alle möglichen reellen Werte für b so, dass gilt: $\int_{-3}^b g(x) dx = -\frac{9}{2}$.

	a	b	c	d	e	f	
Aufgabe 4: Stochastik	2.5	1	1	2.5	2	1	10 Punkte

Fahrgäste ohne gültiges Billet sind ein grosses Problem für die VBL (Verkehrsbetriebe Luzern). Es werden deshalb immer wieder Kontrollen der Fahrgäste durchgeführt. Zwei Kontrolleure steigen stets am Bahnhof Luzern gemeinsam in einen Bus und kontrollieren die Gäste während der Fahrt, die dann endet, wenn der Bus wieder zum Bahnhof Luzern zurückkehrt.

- a1) Am Montag wollen die Kontrolleure jede der 15 Buslinien, die am Bahnhof Luzern vorbei führen, genau einmal kontrollieren. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine solche Kontrolltour zusammenzustellen?
- a2) Am Dienstag soll wie folgt kontrolliert werden: Die Linie 1 insgesamt viermal, die Linie 2 dreimal, die Linie 4 zweimal und die Linie 6 einmal. Wie viele Möglichkeiten, die Kontrolltour zusammenzustellen, gibt es?
- a3) Am Mittwoch sollen auf insgesamt 10 Fahrten wiederum die Linien 1, 2, 4 und 6 kontrolliert werden. Auf wie viele Arten kann die Kontrolltour zusammengestellt werden, wenn jede Linie mindestens einmal kontrolliert werden soll und nur darauf geachtet wird, wie oft eine Linie kontrolliert wird? (eine solche Zusammenstellung wäre beispielsweise fünfmal die Linie 1, einmal die Linie 2, zweimal die Linie 4, zweimal die Linie 6)

Schweizer Verkehrsbetriebe schätzen, dass 1.4% der kontrollierten Fahrgäste kein gültiges Billet vorzeigen können. Am Donnerstag kontrollieren die zwei Kontrolleure 72 Fahrgäste.

- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kontrolleure insgesamt genau zwei Fahrgäste ohne gültiges Billet ermitteln?
- c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kontrolleure mindestens einen Fahrgast ohne gültiges Billet ermitteln?
- d) Wie viele Fahrgäste müssen mindestens überprüft werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98% mindestens ein Fahrgast ohne gültiges Billet ermittelt wird?

Die Kontrolleure vermuten, dass die Anteile der Fahrgäste ohne gültiges Billet auf den verschiedenen Linien unterschiedlich sind. Sie schätzen, dass 3% der Fahrgäste der Linie 1 und 4% der Fahrgäste der Linie 2 kein gültiges Billet vorweisen können. Am Freitag kontrollieren sie wieder 72 Fahrgäste, und zwar 45 Fahrgäste auf der Linie 1 und 27 Fahrgäste auf der Linie 2.

- e) Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kontrolleure bei dieser Kontrolle genau zwei Fahrgäste ohne gültiges Billet ermitteln?

Die VBL gehen davon aus, dass 10% der Fahrgäste, die kein gültiges Billet vorzeigen können, erwischt werden. Ein erwischter Fahrgast muss 100 Franken Busse bezahlen. Besitzt der erwischte Fahrgast jedoch ein Abonnement, das er zu Hause vergessen hat, muss er dieses innerhalb einer Woche vorzeigen und zahlt dann nur eine Umtriebsentschädigung von 5 Franken. Dieser Fall trifft etwa bei der Hälfte der erwischten Fahrgäste zu. Es wird davon ausgegangen, dass jeder nicht erwischte Fahrgast ohne gültiges Billet im Durchschnitt Kosten in der Höhe von 4 Franken verursacht.

- f) Die Fahrgäste, die kein gültiges Billet vorzeigen können, verursachen somit Kosten. Beurteilen Sie mit einer Rechnung, ob durch das erhobene Bussgeld diese Kosten gedeckt werden.

Kurzlösungen:

Aufgabe 1:

a) Parameterform: $S: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Koordinatengleichung: $S: x + 4z - 20 = 0$

b) g und h sind windschief

c) H teilt die Strecke FG im Verhältnis 2:3.

d) $\alpha \approx 11.64^\circ$

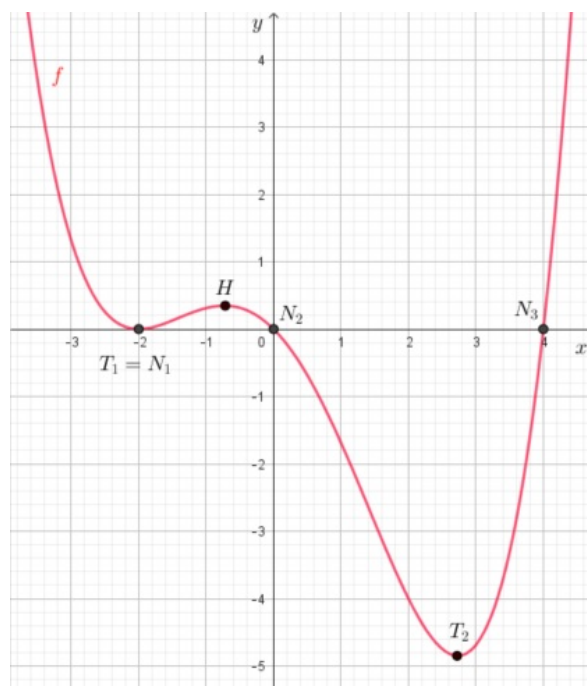
e) $d \approx 4.24$

Aufgabe 2:

a) Nullstellen: $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 4$

lokaler Tiefpunkt $T_1(-2 | 0)$, lokaler Hochpunkt $H(-0.732 | 0.348)$, lokaler Tiefpunkt $T_2(2.732 | -4.848)$

Graph:



b) $x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{6} \approx -2.449, x_3 = \sqrt{6} \approx 2.449$

c) $t: y = 9x - 36$

d) $g(x) = \frac{1}{16}x^4 - 4x$

e) $x = 3, \quad d(3) = 6.75$

Aufgabe 3:

a) $h(x) = -\frac{1}{2}x + 6$
 $k(x) = \frac{1}{2}x + 6$

b) $A = 4\sqrt{6} \approx 9.798$

c) $A \approx 18.167$

d) $A = \int_1^\infty \frac{1}{2x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{2x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2b} + \frac{1}{2} \right)$
 $= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2b} \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2}$

Der Fläche lässt sich der endliche Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ zuordnen.

e) $b_1 = 0, b_2 = -3\sqrt{2} \approx -4.243, b_3 = 3\sqrt{2} \approx 4.243$

Aufgabe 4:

a1) Anzahl Kontrolltouren: $15! \approx 1.31 \cdot 10^{12}$

a2) Anzahl Kontrolltouren: $\frac{10!}{4!3!2!} = 12\,600$

a3) Anzahl Kontrolltouren: $\binom{9}{6} = 84$

b) FG: Fahrgäste bzw. Fahrgast

$$P(2 \text{ FG ohne Billet}) = \binom{72}{2} \cdot 0.986^{70} \cdot 0.014^2 \approx 0.187$$

c) $P(\text{mind. 1 FG ohne Billet}) \approx 0.638$

d) mindestens 278 Fahrgäste müssen kontrolliert werden

e) $P(\text{genau 2 FG ohne Billet}) = P_1 + P_2 + P_3 \approx 0.263$

f) erwartete Einnahmen: 1.65

Die durch die Fahrgäste ohne gültiges Billet verursachten Kosten werden gedeckt.