

Schriftliche Maturitätsprüfung 2023

| | |
|------------------------------------|---|
| Fach | Mathematik Grundlagenfach |
| Prüfende Lehrpersonen | Patrik Hess patrik.hess@sluz.ch Edoardo Sassone edoardo.sassone@sluz.ch Katrin Vock katrin.vock@sluz.ch Stefan Müller stefan.mueller@sluz.ch |
| Klassen | G19c / G19e / G19g / G19i / T18a |
| Prüfungsdatum | 26. Mai 2023 |
| Prüfungsdauer | 180 Minuten |
| Erlaubte Hilfsmittel | <ul style="list-style-type: none"> - «Formeln, Tabellen, Begriffe», DMK, DPK, DCK (2009) - Taschenrechner TI-30X Pro, MultiView oder MathPrint (ohne Benutzerhandbuch) |
| Anweisungen zur Lösung der Prüfung | <ul style="list-style-type: none"> - Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. - Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. - Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden. - Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften. |
| Anzahl erreichbarer Punkte | Aufgabe 1: 10.5 Aufgabe 2: 7.5 Aufgabe 3: 15 Aufgabe 4: 6.5 <u>Aufgabe 5: 4.5</u> Total: 44 Für die Note 6 werden mindestens 39 Punkte benötigt. |
| Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt) | 4 |

| | a | b | c | d | Punkte |
|------------------------------------|---|---|-----|---|-------------|
| Aufgabe 1 – Vektorgeometrie | 2 | 2 | 2.5 | 4 | 10.5 |

Eine Mücke [*musca mathematica*] fliegt geradlinig auf der Flugbahn, welche durch die

Gerade mit der Gleichung $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschrieben wird. Der Parameter t steht für

die Flugzeit (ohne Zeiteinheit).

Eine Spinne [*tarantula geometrica*] hat ein unendlich grosses, ebenes Spinnennetz durch die Punkte $A(2/0/3)$, $B(5/1/0)$ und $C(-1/1/-3)$ aufgespannt.

- Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E , welche durch die Punkte A, B und C bestimmt wird.
- Wird die Mücke auf ihrem Flug ins Netz fliegen. Wenn ja, in welchem Punkt?

Nun wird das Spinnennetz von Menschenhand zerstört und dafür eine unendlich grosse, ebene Glasscheibe aufgestellt.

Die Ebenengleichung dieser Glasscheibe sei $F: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Die Mücke fliegt auch jetzt wieder exakt entlang der obigen Geraden g und stösst im Punkt T auf die Glasscheibe.

- Bestimmen sie diesen Punkt T und die zugehörige Zeit t (ohne Zeiteinheit).

Wenn der Winkel α , mit dem die Mücke auf die Glasscheibe auftrifft, 70° oder mehr beträgt, dann muss sich die Mücke vor dem Weiterflug etwas erholen und bleibt ein paar Sekunden auf der Glasscheibe sitzen. Bei kleinerem Auftreffwinkel fliegt die Mücke sofort weiter.

- Bestimmen Sie mit einer entsprechenden Rechnung, ob die Mücke eine kurze Pause macht, oder ob sie gleich weiterfliegt.

[Bei der Erstellung dieser Aufgabe kamen keine Tiere zu Schaden.]

Punkte

Aufgabe 2 – Analysis**7.5**

Gesucht ist eine Polynomfunktion 3. Grades, welche in $W(1|-2)$ einen Wendepunkt hat und die y-Achse bei $y = -1$ schneidet. Weiter steht die Wendetangente senkrecht zur Geraden g mit der Gleichung $g(x) = \frac{1}{2}x + 5$.

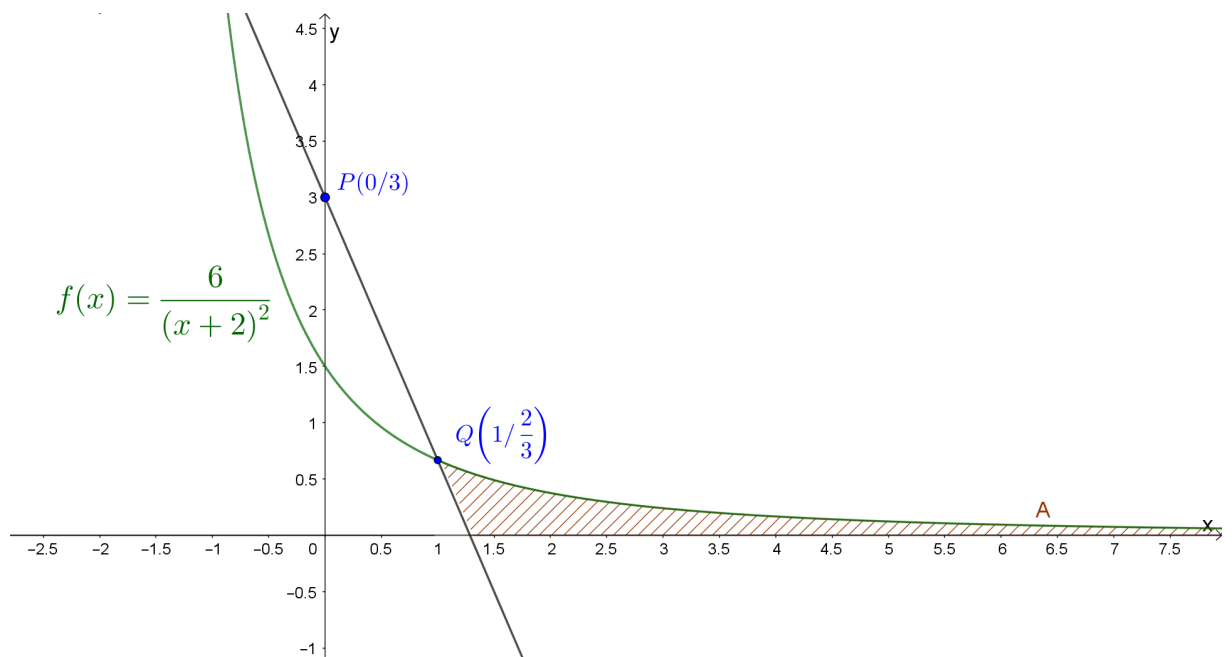
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Polynomfunktion.

| a | b ₁ | b ₂ | c | d | Punkte |
|-----|----------------|----------------|-----|-----|-----------|
| 3.5 | 1.5 | 2 | 2.5 | 5.5 | 15 |

Aufgabe 3 – Analysis

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{6}{(x+2)^2}$.

- Bestimmen Sie im Kurvenpunkt $P(-5/?)$ die Gleichung der Kurventangente t .
- Zeigen Sie, dass $F(x) = \frac{-6}{x+2}$ eine Stammfunktion von f ist.
 - Bestimmen Sie a so, dass $\int_1^a f(x) dx = \frac{5}{4}$.
- Wir betrachten jetzt nur einen Ausschnitt des Graphen der Funktion f , nämlich den Teil, der über dem Intervall $[1, 4]$ liegt.
Dieser Ausschnitt erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen Rotationskörper mit Volumen V . Berechnen Sie V ausführlich mithilfe einer Stammfunktion.
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt A der ins Unendliche reichenden Fläche, welche in der Zeichnung schraffiert dargestellt ist.



| | a | b | Punkte |
|---|-----|---|------------|
| Aufgabe 4 – Wahrscheinlichkeit, Kombinatorik | 2.5 | 4 | 6.5 |

- a) Eine Urne enthält 2 gelbe, 3 rote und 2 blaue Kugeln. Gleichfarbige Kugeln sind nicht unterscheidbar.
- Auf wie viele Arten können die Kugeln in einer Reihe angeordnet werden?
 - Auf wie viele Arten können die Kugeln in einer Reihe angeordnet werden, wenn Kugeln gleicher Farbe nebeneinander liegen müssen?
 - Auf wie viele Arten können die Kugeln in einer Reihe angeordnet werden, wenn an erster und letzter Stelle eine gelbe Kugel und die anderen Kugeln beliebig liegen können?
- b) Beim Glücksspiel mit 2 gelben, 3 roten und 2 blauen Kugeln in der Urne werden mit einem Griff zwei Kugeln gezogen. Werden zwei gelbe Kugeln gezogen, erhält der Spieler 10 Fr. Bei 2 roten oder 2 blauen gezogenen Kugeln erhält der Spieler 6 Fr. Bei allen anderen Ziehungen muss ein Betrag von 2 Fr. bezahlt werden.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Gewinne, respektive Verluste.
 - Die Zufallsvariable X stelle den Gewinn, respektive Verlust, pro Spiel dar. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X .

| | a | b | c | d | Punkte |
|---------------------------------------|---|---|---|-----|------------|
| Aufgabe 5 - Wahrscheinlichkeit | 1 | 1 | 2 | 0.5 | 4.5 |

Beim Pfeilbogenschiessen trifft Max die aufgestellte Zielscheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.4$.

Die Resultate sind auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

- Max hat 8 Versuche. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er mindestens einmal?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft Max bei 8 Versuchen genau dreimal?
- Wie viele Versuche (n) müsste Max mindestens haben, damit die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens einmal trifft, grösser als 0.95 ist?
- Max trainiert das Bogenschiessen mit Einheiten von jeweils 6 Versuchen. Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Treffer bei 6 Versuchen.

| | a | b | c | d | Punkte |
|----------------------------|---|---|-----|---|-------------|
| Resultate Aufgabe 1 | 2 | 2 | 2.5 | 4 | 10.5 |

a)

$$\underline{\underline{E: -x + 9y + 2z = 4}}$$

b)

Die Mücke trifft im Punkt $\underline{\underline{P\left(-\frac{2}{5} / -\frac{6}{5} / \frac{36}{5}\right) = P(-0.4 / -1.2 / 7.2)}}$ auf das Netz.

c)

Die Mücke wird zur Zeit $\underline{\underline{t = 7}}$ im Punkt $\underline{\underline{T(4/1/5)}}$ auf die Glasscheibe auftreffen.

d)

$$\alpha \approx \arcsin(0.9030) \approx \underline{\underline{64.56^\circ}}$$

Die Mücke fliegt also sofort weiter ($\alpha < 70^\circ$).

| | Punkte |
|----------------------------|------------|
| Resultate Aufgabe 2 | 7.5 |

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1}}$$

| | a | b ₁ | b ₂ | c | d | Punkte |
|----------------------------|-----|----------------|----------------|-----|-----|-----------|
| Resultate Aufgabe 3 | 3.5 | 1.5 | 2 | 2.5 | 5.5 | 15 |

a)

$$\underline{\underline{t: y = \frac{4}{9}x + \frac{26}{9}}}$$

b)

b₁)

$$\underline{\underline{F'(x) = f(x) \checkmark}}$$

b₂)

$$\int_1^a f(x) dx = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 6}}$$

c)

$$\underline{\underline{V = \frac{7}{18}\pi}}$$

d)

$$g = PQ: \quad \underline{g(x) = -\frac{7}{3}x + 3}$$

$$\underline{g(x) = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = \frac{9}{7}}$$

$$A = \int_1^{\infty} f(x) dx - A(\text{Dreieck}) = 2 - \frac{2}{21} = \underline{\underline{\frac{40}{21}}}$$

| | a | b | Punkte |
|----------------------------|-----|---|------------|
| Resultate Aufgabe 4 | 2.5 | 4 | 6.5 |

a) i) Anzahl Permutationen mit Wiederholung:

$$\underline{\underline{210}}$$

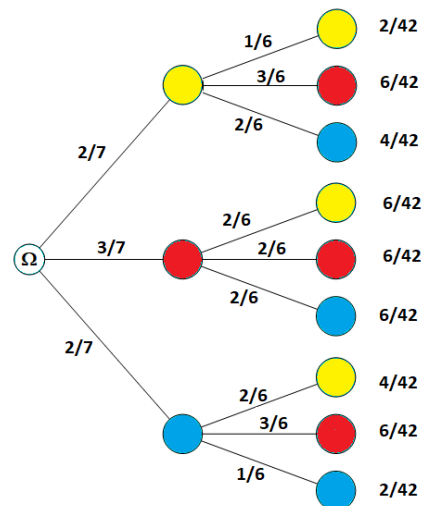
ii) Es gibt drei Farben. Die Anzahl Permutationen beträgt 6

iii) Die gelben Farben sind angeordnet. Es sind die roten und blauen Kugeln anzuordnen.
Anzahl Anordnungen = 10

b) Mit einem Griff zwei Kugeln ziehen bedeutet «Ziehen ohne Zurückzulegen».

Aus dem Baumdiagramm folgt mit den Abkürzungen g: gelb, r: rot und b: blau

$$P(\{\text{verschiedenfarbig}\}) = 1 - \frac{2}{42} - \frac{6}{42} - \frac{2}{42} = \frac{32}{42} = \underline{\underline{\frac{16}{21}}}$$



Der Erwartungswert für die Auszahlung beträgt:

$$E[X] = 10 \cdot \frac{1}{21} + 6 \cdot \frac{3}{21} + 6 \cdot \frac{1}{21} - 2 \cdot \frac{16}{21} = \underline{\underline{\frac{2}{21} \approx 0.095[\text{Fr.}]}}$$

| | a | b | c | d | Punkte |
|-------------------------|---|---|---|-----|------------|
| Lösung Aufgabe 5 | 1 | 1 | 2 | 0.5 | 4.5 |

a) Binomialverteilung mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.4$ und $n = 8$ Versuche.
Sei X die Anzahl der Treffer. Dann trifft er mindestens einmal mit der Wahrscheinlichkeit
 $P(X \geq 1) \approx \underline{\underline{0.98}}$

b) Binomialverteilung: Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.4$, $n = 8$ Versuche und $k = 3$ Erfolge.
Sei X die Anzahl der Treffer. Dann trifft er genau drei Mal mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(X = 3) \approx \underline{\underline{0.28}}$$

- c) Binomialverteilung: Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.4$, n Versuche.
Sei X die Anzahl der Treffer. Dann soll die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens einmal trifft, grösser als 0.95 sein.

Er müsste mindestens $n = 6$ Versuche haben.

- d) Der Erwartungswert beträgt 2.4 Mal.