KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2022

Fach	Grundlagenfach Mathematik
Prüfende Lehrpersonen	Essodinam Alitiloh essodinam.alitiloh@edulu.ch Caroline Farner caroline.farner@edulu.ch
Klassen	G18b, G18c
Prüfungsdatum	Freitag, 20. Mai 2022
Prüfungsdauer	180 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel	Formelsammlung «Formeln, Tabellen, Begriffe» Taschenrechner TI-30X Pro MultiView oder MathPrint (ohne Benutzerhandbuch)
Anweisung zur Lösung der Prüfung	• Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. • Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. • Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden. • Jeder Bogen ist mit Namen, Nr. und Klasse zu beschriften.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 8 Aufgabe 2: 12 Aufgabe 3: 13 Aufgabe 4: 12 **Total: 45** Für die Note 6 werden mindestens 38 Punkte benötigt.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	5

Name, Vorname: ______________________ Klasse: ____________ Nr: ____

	a	b	c	d	**Punkte**
Aufgabe 1 – Analysis I	0.5	4.5	0.5	2.5	**8**

Gegeben ist die Kurve $f(x) = y = \frac{-x^2+5x-4}{x}$ mit den Ableitungen

$f'(x) = \frac{-x^2+4}{x^2}$, $f''(x) = \frac{-8}{x^3}$ und $f'''(x) = \frac{24}{x^4}$

sowie die Nullstellen $NS_1(1|0)$ und $NS_2(4|0)$.

a. Leiten Sie die Funktion $f(x)$ ab und zeigen Sie damit, dass die angegebene erste Ableitung korrekt ist.

b. Diskutieren Sie die Funktion f (Definitionsbereich, Polstellen, Asymptoten, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte) und skizzieren Sie den Graphen für $-10 \leq x \leq 10$. Nehmen Sie ein Häuschen als Einheit.

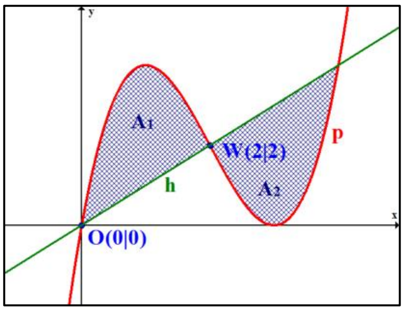
c. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Funktion und der x-Achse zwischen den Nullstellen NS_1 und NS_2 eingeschlossen wird. *(Taschenrechner erlaubt)*

d. Der Punkt $P\ (u|v)$ liegt im 1. Quadranten auf dem Funktionsgraphen von f, $O\ (0|0)$ ist der Ursprung. Bestimmen Sie die Koordinaten von P so, dass das rechtwinklige Dreieck, das die Hypotenuse $\overline{OP}$ hat und dessen eine Kathete auf der x-Achse liegt, eine möglichst grosse Fläche hat.

	a	b	c	d	e	f	Punkte
Aufgabe 2 – Analysis II	3.5	2	1.5	1	1.5	2.5	**12**

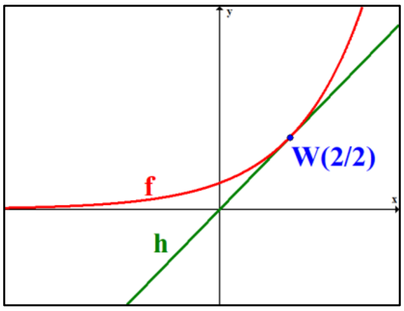
a. Eine Parabel p 3. Grades verläuft durch den Koordinatenursprung und berührt die x-Achse bei x = 6. Sie schliesst im ersten Quadranten mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt 12 ein. Bestimmen Sie die Gleichung der Kurve p.

→ *Lösen Sie nun die folgenden Aufgaben mit der Funktionsgleichung $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ für die Kurve.*



b. Die Gerade h geht durch den Ursprung O und durch den Wendepunkt W der Kurve p. Die Gerade h schliesst mit der Parabel p im 1. Quadranten zwei Flächenstücke ein. Zeigen Sie mithilfe der Integralrechnung, dass diese Flächenstücke gleich gross sind.

c. Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{x-2}{2}}$ im Punkt $W(2|2)$ die Gerade h als Tangente hat.

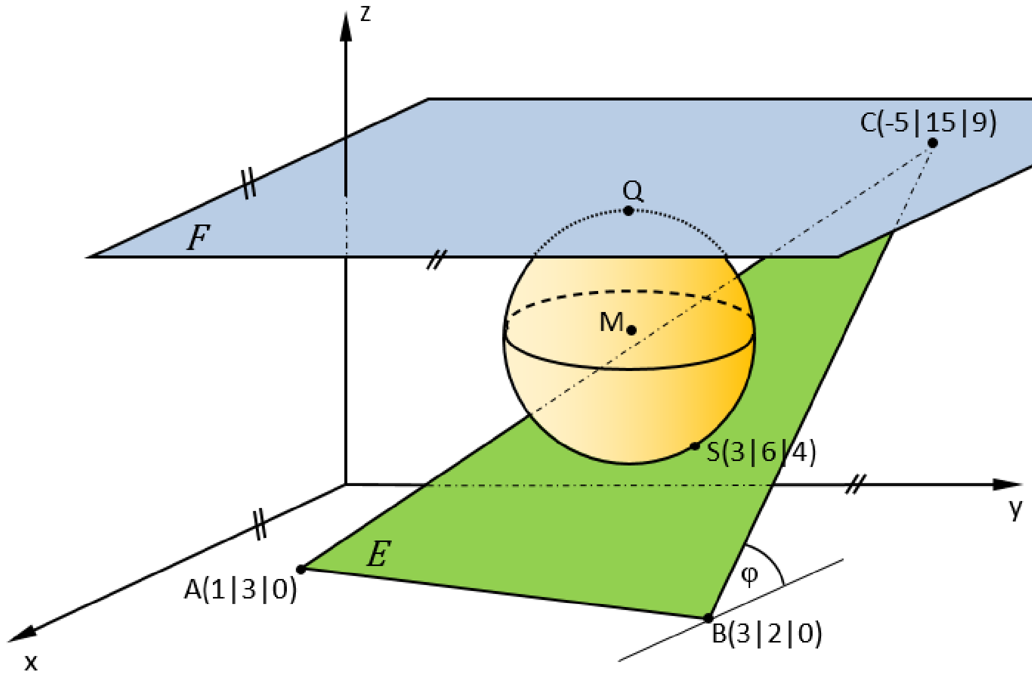


d. Weisen Sie nach, dass $F(x) = 4 \cdot e^{\frac{x-2}{2}} + c$ die Stammfunktion von f ist.

e. Zusammen mit der negativen x-Achse und der positiven y-Achse schliesst der Graph von f eine Fläche ein, welche sich nach links ins Unendliche erstreckt. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche unter Verwendung und Auswertung der Stammfunktion aus Teilaufgabe d.

f. Der Graph von f rotiert zwischen x = 2 und x = b um die x-Achse.
Der so entstehende Rotationskörper besitzt ein Volumen von $V = 4\pi \cdot (e^3 - 1)$. Bestimmen Sie den Wert von b.

	a	b	c	d_i	d_{ii}	e_i	e_{ii}	**Punkte**
Aufgabe 3 – Vektorgeometrie	2	2	3	3	1	1	1	**13**



Die Ebene E wird durch die drei Punkte A, B und C aufgespannt, wobei der Punkt C auch in der Ebene $F: z - 9 = 0$ liegt. Diese verläuft parallel zur xy-Ebene.

Ferner befindet sich eine Kugel mit dem Mittelpunkt M zwischen den beiden Ebenen, so dass sie die Ebene E im Punkt S und die Ebene F im Punkt Q berührt.

a. Zeigen Sie, dass die Ebene E die Gleichung $E: x + 2y - 2z - 7 = 0$ besitzt.

b. Um welchen Winkel φ ist die Ebene E gegenüber der xy-Ebene geneigt?

c. Die Gerade g_{CS} durch die Punkte C und S schneidet die xy-Ebene im Punkt T.
Ist T näher bei A oder bei B? Begründen Sie Ihre Antwort mit einer Rechnung.

d. Die Gerade g_{AB} geht durch die Punkte A und B.

i. Wie weit ist der Punkt C von g_{AB} entfernt?

ii. Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks Δ_{ABC}.

e. Wie oben beschrieben, berührt die Kugel mit Mittelpunkt M die Ebene E und die Ebene F.

i. Bestimmen Sie die x- und y-Koordinaten des Mittelpunktes $M(x|y|6)$ der Kugel.

ii. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q in dem die Kugel die Ebene F berührt.

	a_i	a_{ii}	a_{iii}	b_i	b_{ii}	b_{iii}	b_{iv}	b_v	c	**Punkte**
Aufgabe 4 – Stochastik	1	0.5	2	1	0.5	1	1	3	2	**12**

In einer Kiste befinden sich 5 rote, 3 weisse und 2 gelbe Kugeln. Gleichfarbige Kugeln sind nicht voneinander unterscheidbar.

a. Ein Kind legt alle Kugeln nacheinander auf einen Tisch. Wie viele verschiedene Anordnungsmöglichkeiten gibt es,

   i. wenn keine weiteren Einschränkungen bestehen?

   ii. wenn alle gleichfarbigen Kugeln jeweils nebeneinander liegen sollen?

   iii. wenn nie zwei rote Kugeln nebeneinander liegen dürfen?

b. Die Kugeln werden in einem ersten Spiel zufällig mit Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,

   i. bei 4 Ziehungen genau 2 gelbe Kugeln zu ziehen?

   ii. bei 10 Ziehungen keine gelbe Kugel zu ziehen?

   iii. bei 5 Ziehungen mindestens 3 rote Kugeln zu ziehen?

   iv. bei der 10. Ziehung die 7. weisse Kugel zu ziehen?

   v. Bestimmen Sie die Anzahl Ziehungen, die es mindestens braucht, um mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit mindestens eine gelbe Kugel zu ziehen.

c. In einem zweiten Spiel werden drei Kugeln mit einem Griff gezogen. Für jede weisse Kugel erhält der Spieler 2 Fr., für jede andersfarbige muss er einen Franken bezahlen. Mit welchem durchschnittlichen Gewinn kann der Spieler pro Spiel rechnen?

KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2022

Fach	Grundlagenfach Mathematik
Prüfende Lehrpersonen	Essodinam Alitiloh essodinam.alitiloh@edulu.ch Caroline Farner caroline.farner@edulu.ch
Klassen	G18b, G18c
Prüfungsdatum	Freitag, 20. Mai 2022
Prüfungsdauer	180 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel	Formelsammlung «Formeln, Tabellen, Begriffe» Taschenrechner TI-30X Pro MultiView oder MathPrint (ohne Benutzerhandbuch)
Anweisung zur Lösung der Prüfung	• Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. • Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. • Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden. • Jeder Bogen ist mit Namen, Nr. und Klasse zu beschriften.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 8 Aufgabe 2: 12 Aufgabe 3: 13 Aufgabe 4: 12 **Total: 45** Für die Note 6 werden mindestens 38 Punkte benötigt.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	5

Name, Vorname: ______________________ Klasse: ____________ Nr: ___

	a	b	c	d	**Punkte**
Aufgabe 1 – Analysis I	0.5	4.5	0.5	2.5	**8**

Gegeben ist die Kurve $f(x) = y = \frac{-x^2+5x-4}{x}$ mit den Ableitungen

$f'(x) = \frac{-x^2+4}{x^2}$, $f''(x) = \frac{-8}{x^3}$ und $f'''(x) = \frac{24}{x^4}$

sowie die Nullstellen $NS_1(1|0)$ und $NS_2(4|0)$.

a. Leiten Sie die Funktion $f(x)$ ab und zeigen Sie damit, dass die angegebene erste Ableitung korrekt ist.

b. Diskutieren Sie die Funktion f (Definitionsbereich, Polstellen, Asymptoten, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte) und skizzieren Sie den Graphen für $-10 \leq \mathrm{x} \leq 10$. Nehmen Sie ein Häuschen als Einheit.

c. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Funktion und der x-Achse zwischen den Nullstellen NS_1 und NS_2 eingeschlossen wird. *(Taschenrechner erlaubt)*

d. Der Punkt $P\ (u|v)$ liegt im 1. Quadranten auf dem Funktionsgraphen von f, $O\ (0|0)$ ist der Ursprung. Bestimmen Sie die Koordinaten von P so, dass das rechtwinklige Dreieck, das die Hypotenuse $\overline{OP}$ hat und dessen eine Kathete auf der x-Achse liegt, eine möglichst grosse Fläche hat.

Lösung:

a. Quotientenregel

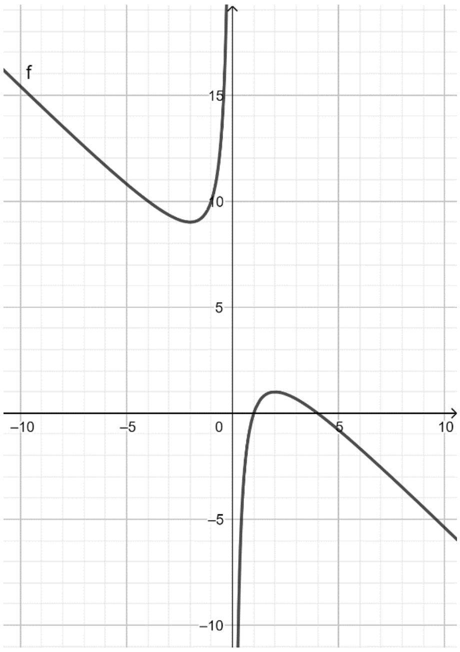
b. $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

Polstelle bei $x = 0$.

Asymptote: $y = -x + 5$

Extrema: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ T\ (-2 \mid 9),\ H\ (2 \mid 1)$

Wendepunkt: existiert nicht



c. $\int_1^4 \frac{-x^2+5x-4}{x}\, dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 5x - 4 \cdot \ln(x)\right]_1^4 \approx 1.95$

d. $A_{max} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{-x^2+5x-4}{x} = -\frac{x^2}{2} + 2.5x - 2$

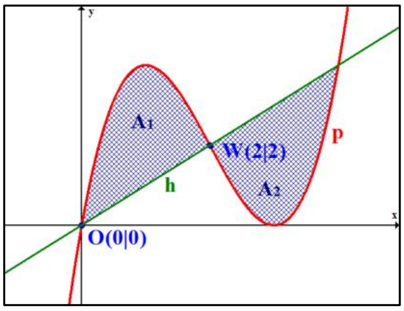
$A'_{max} = -x + 2.5 = 0, f''(2.5) = -1 < 0 \Rightarrow max.$

$\mathbb{L} = \{P\ (2.5 \mid 0.9)\}$

	a	b	c	d	e	f	Punkte
Aufgabe 2 – Analysis II	3.5	2	1.5	1	1.5	2.5	**12**

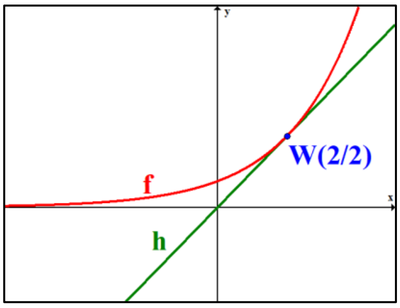
a. Eine Parabel p 3. Grades verläuft durch den Koordinatenursprung und berührt die x-Achse bei x = 6. Sie schliesst im ersten Quadranten mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt 12 ein. Bestimmen Sie die Gleichung der Kurve p.

→ *Lösen Sie nun die folgenden Aufgaben mit der Funktionsgleichung* $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ *für die Kurve.*



b. Die Gerade h geht durch den Ursprung 0 und durch den Wendepunkt W der Kurve p. Die Gerade h schliesst mit der Parabel p im 1. Quadranten zwei Flächenstücke ein. Zeigen Sie mithilfe der Integralrechnung, dass diese Flächenstücke gleich gross sind.

c. Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{x-2}{2}}$ im Punkt $W\ (2|2)$ die Gerade h als Tangente hat.



d. Weisen Sie nach, dass $F(x) = 4 \cdot e^{\frac{x-2}{2}} + c$ die Stammfunktion von f ist.

e. Zusammen mit der negativen x-Achse und der positiven y-Achse schliesst der Graph von f eine Fläche ein, welche sich nach links ins Unendliche erstreckt. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche unter Verwendung und Auswertung der Stammfunktion aus Teilaufgabe d.

f. Der Graph von f rotiert zwischen x = 2 und x = b um die x-Achse.
Der so entstehende Rotationskörper besitzt ein Volumen von $V = 4\pi \cdot (e^3 - 1)$. Bestimmen Sie den Wert von b.

Lösung:

a. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen:

1) $f(0) = 0$	$d = 0$
2) $f(6) = 0$	$216a + 36b + 6c = 0$
3) $f'(6) = 0$	$108a + 72b + c = 0$
4) $\int_0^6 f(x)\,dx = 12$	$\left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2}\right]_0^6 = 324a + 72b + 18c = 12$

mit TR folgt: $a = \frac{1}{9}$; $b = -\frac{4}{3}$; $c = 4 \rightarrow f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 4x$

b. Steigung $m = \frac{y_W - y_O}{x_W - x_O} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow g(x) = x$ (q=0, weil $O \in\ g) \Rightarrow g(x) = p(x) \Rightarrow$ $S_1(0|0), S_2(2|2), S_3(4|4)$

$|\int_0^2 x^3 - 6x^2 + 9x - x\ dx| \overset{?}{=} \left|\int_2^4 x^3 - 6x^2 + 9x - x\ dx\right| \Rightarrow |4| = |-4|$ qed.

c. $f'(x) = \frac{2}{e} \cdot 0.5 \cdot e^{0.5x} \ \Rightarrow f'(2) = 1 \Rightarrow t(x)\colon y = x = g(x)$ (q=0 berechnen oder überlegen) qed.

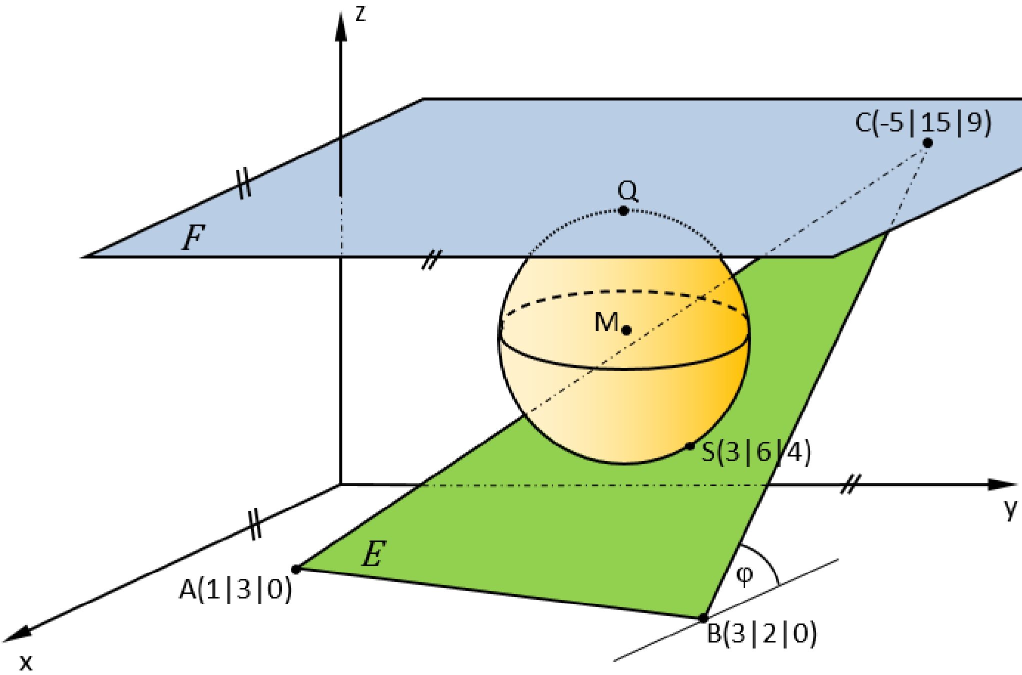
d. $F'(x) = \frac{4}{e} \cdot 0.5 \cdot e^{0.5x} = \frac{2}{e} \cdot e^{0.5x} = 2 \cdot e^{-1} \cdot e^{\frac{x}{2}} = 2e^{\frac{x}{2}-1} = 2e^{\frac{x-2}{2}} = f(x)$

e. $\lim\limits_{b \to -\infty} [\,4 \cdot e^{\frac{x-2}{2}} + c]_b^0 = \lim\limits_{b \to -\infty} (\,4 \cdot e^{\frac{0-2}{2}} + c - \underbrace{4 \cdot e^{\frac{b-2}{2}}}_{\to 0} - c) = \frac{4}{e}$

f. $\pi \int_2^b 4 \cdot e^{x-2}\ dx = [4 \cdot e^x \cdot \frac{1}{e^2} + c]_2^b = \pi \left(\frac{4}{e^2} \cdot e^b + c - \frac{4}{e^2} \cdot e^2 - c\right) = 4\pi \left(\frac{e^b}{e^2} - 1\right)$

$4\pi \left(\frac{e^b}{e^2} - 1\right) = 4\pi(e^3 - 1) \Leftrightarrow b = 5$

	a	b	c	d_i	d_{ii}	e_i	e_{ii}	**Punkte**
Aufgabe 3 – Vektorgeometrie	2	2	3	3	1	1	1	**13**



Die Ebene E wird durch die drei Punkte A, B und C aufgespannt, wobei der Punkt C auch in der Ebene $F: z - 9 = 0$ liegt. Diese verläuft parallel zur xy-Ebene.

Ferner befindet sich eine Kugel mit dem Mittelpunkt M zwischen den beiden Ebenen, so dass sie die Ebene E im Punkt S und die Ebene F im Punkt Q berührt.

a. Zeigen Sie, dass die Ebene E die Gleichung $E: x + 2y - 2z - 7 = 0$ besitzt.

b. Um welchen Winkel φ ist die Ebene E gegenüber der xy-Ebene geneigt?

c. Die Gerade g_{CS} durch die Punkte C und S schneidet die xy-Ebene im Punkt T. Ist T näher bei A oder bei B? Begründen Sie Ihre Antwort mit einer Rechnung.

d. Die Gerade g_{AB} geht durch die Punkte A und B.

i. Wie weit ist der Punkt C von g_{AB} entfernt?

ii. Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks Δ_{ABC}.

e. Wie oben beschrieben, berührt die Kugel mit Mittelpunkt M die Ebene E und die Ebene F.

i. Bestimmen Sie die x- und y-Koordinaten des Mittelpunktes $M(x|y|6)$ der Kugel.

ii. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q in dem die Kugel die Ebene F berührt.

Lösungen:

a. $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \left| \begin{matrix} x = 1 + 2s - 6t \\ y = 3 - s + 12t \\ z = 9t \end{matrix} \right|$

z in x und y: $\left| \begin{matrix} x = 1 + 2s - \frac{2}{3}z \\ y = 3 - s + \frac{4}{3}z \end{matrix} \right| \rightarrow \left| \begin{matrix} x = 1 + 2s - \frac{2}{3}z \\ 2y = 6 - 2s + \frac{8}{3}z \end{matrix} \right| \oplus$

$\rightarrow x + 2y = 7 + 2z \rightarrow E: x + 2y - 2z - 7 = 0$

$S(3|6|4) \in E:\ 3 + 12 - 8 - 7 = 0$ qed.

b. Normalenvektor von E : $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ Normalenvektor xy-Ebene : $\vec{n}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_E \vec{n}_{xy}}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_{xy}|} = \frac{-2}{3 \cdot 1} = -\frac{2}{3} \rightarrow \cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = 131.81° \rightarrow \underline{48.19°}$

c. $g_{CS}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} + t \overbrace{\begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}}^{=\overrightarrow{CS}} \cap\ xy - Ebene \rightarrow z = 0 \rightarrow 9 + 5t = 0 \rightarrow t = -\frac{9}{5} \rightarrow$

T(9.4|-1.2|0)$\Rightarrow \left|\overrightarrow{TA}\right| = \left| \begin{pmatrix} -8.4 \\ 4.2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{8.4^2 + 4.2^2} = \sqrt{80.8} = \underline{9.39}$

$\left|\overrightarrow{TB}\right| = \left| \begin{pmatrix} 6.4 \\ -3.2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6.4^2 + 3.2^2} = \sqrt{51.2} = \underline{7.16} \Rightarrow$ <u>T ist näher bei B</u>

dᵢ. Normalebene zu $g_{AB}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{=\overrightarrow{AB}}$ durch C: N : 2x – y + D = 0

C(-5|15|9) $\in$ N : -10 – 15 + D = 0 $\rightarrow$ D = 25 $\rightarrow$ N : 2x – y + 25 = 0

N $\cap$ g_{AB}: 2(1 + 2t) – (3 – t) + 25 = 0 $\rightarrow$ 2 + 4t – 3 + t + 25 = 0

5t = -24

<u>t = -4.8</u>

N $\cap$ g_{AB} = {H} mit H(-8.6|7.8|0) $\rightarrow \left|\overrightarrow{HC}\right| = \left| \begin{pmatrix} 3.6 \\ 7.2 \\ 9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{145.8}$ = Distanz C zu g_{AB}

dᵢᵢ. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5} = Grundseite \qquad \left|\overrightarrow{HC}\right| = \left| \begin{pmatrix} 3.6 \\ 7.2 \\ 9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{145.8} = Höhe$

$\rightarrow$ Fläche des Dreiecks $\Delta_{ABC} = \frac{\sqrt{145.8} \cdot \sqrt{5}}{2} = 13.5$

eᵢ. *Idee*: Man legt eine Gerade durch M und S normal zu E, aus der z-Koordinate ergibt sich dann s.

$$\rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} \pm \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \pm s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow s = -1 \Longrightarrow M(2|4|6)$$

e ii. *Idee*: Addiere zu Punkt M einen normalen Vektor zur Ebene F der Länge $\left|\overrightarrow{SM}\right| = 3$.

$$\rightarrow \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow Q(2|4|9)$$

	a_i	a_{ii}	a_{iii}	b_i	b_{ii}	b_{iii}	b_{iv}	b_v	c	**Punkte**
Aufgabe 4 – Stochastik	1	0.5	2	1	0.5	1	1	3	2	**12**

In einer Kiste befinden sich 5 rote, 3 weisse und 2 gelbe Kugeln. Gleichfarbige Kugeln sind nicht voneinander unterscheidbar.

a. Ein Kind legt alle Kugeln nacheinander auf einen Tisch. Wie viele verschiedene Anordnungsmöglichkeiten gibt es,

  i. wenn keine weiteren Einschränkungen bestehen?

  ii. wenn alle gleichfarbigen Kugeln jeweils nebeneinander liegen sollen?

  iii. wenn nie zwei rote Kugeln nebeneinander liegen dürfen?

b. Die Kugeln werden in einem ersten Spiel zufällig mit Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,

  i. bei 4 Ziehungen genau 2 gelbe Kugeln zu ziehen?

  ii. bei 10 Ziehungen keine gelbe Kugel zu ziehen?

  iii. bei 5 Ziehungen mindestens 3 rote Kugeln zu ziehen?

  iv. bei der 10. Ziehung die 7. weisse Kugel zu ziehen?

  v. Bestimmen Sie die Anzahl Ziehungen, die es mindestens braucht, um mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit mindestens eine gelbe Kugel zu ziehen.

c. In einem zweiten Spiel werden drei Kugeln mit einem Griff gezogen. Für jede weisse Kugel erhält der Spieler 2 Fr., für jede andersfarbige muss er einen Franken bezahlen. Mit welchem durchschnittlichen Gewinn kann der Spieler pro Spiel rechnen?

Lösung:

a_i. $\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = 2520$

a_{ii}. Die jeweils gleichfarbigen Kugeln werden als eine Einheit betrachtet.

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

a_{iii}. Die roten Kugeln zuerst verteilen (geht auf 6 Arten nämlich 1,3,5,7,9 oder 1,3,5,8,10 oder 1,3,6,8,10 oder 1,4,6,8,10 oder 2,4,6,8,10 oder 1,3,5,7,10)

$$6 \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = 60$$

b_i. $P(4,2;\frac{1}{5}) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0.154$

b_{ii}. $P(10,0;\frac{1}{5}) = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{10} = 0.107$

b_{iii}. $P(5,k;\frac{1}{2}) = \sum_{k=3}^{5} \binom{5}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} = 0.5$

b_{iv}. Bernoulli-Experiment bis zur 9.Ziehung. Die 10. Ziehung ist gesondert zu betrachten.

$$P(E) = P(9,6,\frac{3}{10}) \cdot \frac{3}{10} = \binom{9}{6} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^6 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^3 \cdot \frac{3}{10} = 0.0019$$

bv. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{8}{10}\right)^n$

$1 - (0.8)^n \geq 0.99 \Leftrightarrow 0.8^n \leq 0.01$

$n \geq 20.6$

$n \geq 21$

c.

X	3 weisse: 6Fr.	2 weisse: 3 Fr.	1 weisse: 0 Fr.	0 weisse: -3 Fr.
P(X=...)	$P(3w) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}}$ $= \frac{1}{120}$ $= 0.00833$	$P(2w)$ $= \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{10}{3}}$ $= \frac{3 \cdot 7}{120} = 0.175$	$P(1w)$ $= \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{10}{3}}$ $= \frac{63}{120} = 0.525$	$P(0w) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}}$ $= \frac{35}{120}$ $= 0.29166$

$\Rightarrow E(X) = 0.008 \cdot 6 + 0.175 \cdot 3 + 0.525 \cdot 0 - 0.291 \cdot 3$

$\Rightarrow E(X) = -0.3\ Fr$. Also der Spieler verliert durchschnittlich 30 Rp. pro Spiel.