KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

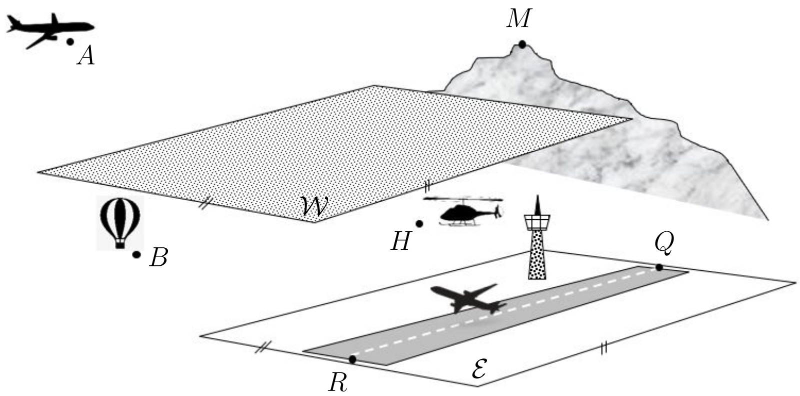
Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2021

Fach	Grundlagenfach Mathematik
Prüfende Lehrpersonen	Pascal Basler pascal.basler@edulu.ch Philipp Spindler philipp.spindler@edulu.ch
Klassen	6d, 6f, 6k
Prüfungsdatum	25. Mai 2021
Prüfungsdauer	3 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel	• Formelsammlung „Formeln, Tabellen, Begriffe“, DMK • Taschenrechner TI-30X Pro (ohne Handbuch)
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	• Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. • Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden und muss einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. • Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften. • Der Einsatz der Hilfsmittel ist klar anzugeben.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 11.5 Aufgabe 2: 11 Aufgabe 3: 8 Aufgabe 4: 3 Aufgabe 5: 11.5 Total: 45 Die Note 6 wird für mindestens 38 Punkte erteilt, die Note 4 für mindestens 22 Punkte.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	5

....
Name, Vorname Klasse Nummer

	a	b	c	d	e	
Aufgabe 1: Vektorgeometrie	4.5	2	1	2	2	**11.5 Punkte**



Wir betrachten einen Flughafen mit der Start- und Landebahn QR in der Ebene $\mathcal{E}$ sowie den Berg mit der Spitze M. Die Untergrenze einer Wolkenschicht, die Ebene $\mathcal{W}$, ist parallel zur Ebene $\mathcal{E}$. Die Einheiten des Koordinatensystems sind in Kilometern angegeben.

Gegeben sind die Punkte $R(6\,|\,4\,|\,0)$ und $M(7\,|\,2\,|\,2)$. Die Wolkengrenze wird durch die Gleichung $\mathcal{W}: x - 2y + 2z - 16 = 0$ beschrieben.

a) a1) Berechnen Sie die Distanz des Flugzeugs in $A(-6\,|\,-6\,|\,14)$ zur Bergspitze M.

a2) Das Flugzeug fliegt vom Punkt A auf einer geraden Linie zum Punkt R, um zu landen. In welchem Punkt S durchdringt das Flugzeug die Wolkengrenze $\mathcal{W}$?

a3) Unter welchem Winkel φ schneidet das Flugzeug die Wolkengrenze $\mathcal{W}$?

b) Ein Helikopter fliegt vom Punkt $H(5\,|\,9\,|\,6)$ in die Richtung $\vec{v}_H = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass sich die Flugbahnen des Helikopters und des Flugzeugs, das von A nach R fliegt, nicht schneiden.

c) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $\mathcal{E}$.

d) Wie gross ist die Distanz zwischen der Wolkengrenze $\mathcal{W}$ und der Ebene $\mathcal{E}$?

e) Flugzeuge starten im Punkt $Q(2\,|\,2\,|\,0)$, beschleunigen in die Richtung von R und heben irgendwo zwischen Q und R in die Richtung von $\vec{v}_S = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ab. Der Raum, den Flugzeuge während ihres Starts durchfliegen, heisst *Startraum*. In diesem Raum sollten sich während eines Flugzeugstarts keine weiteren Flugobjekte befinden.

Zum Zeitpunkt eines Flugzeugstarts befindet sich ein Heissluftballon in der Position $B(6.5\,|\,3\,|\,1)$. Schwebt der Heissluftballon gerade im verbotenen Startraum? Begründen Sie Ihre Antwort mit einer Rechnung.

	a	b	c	d	e	f	
Aufgabe 2: Stochastik	1	1.5	1	3.5	1	3	**11 Punkte**

Die Super League ist die höchste Spielklasse im Schweizer Fussball. Zehn Mannschaften kämpfen um den Meistertitel. Jede Mannschaft spielt viermal gegen jeden Gegner, zweimal vor heimischem Publikum, zweimal auswärts. Insgesamt werden somit 180 Spiele ausgetragen.

a) Wir betrachten alle möglichen Ranglisten der ersten drei Plätze der zehn Mannschaften.

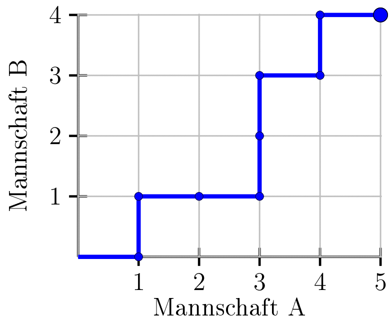
a1) Wie viele solcher Ranglisten der ersten drei Plätze gibt es?

a2) Wie viele dieser Ranglisten enthalten den FC Luzern und den FC Basel?

Der Spielverlauf beschreibt alle Zwischenstände eines Spieles. Ein möglicher Spielverlauf mit Ausgang 5:4 wäre:

0:0 → 1:0 → 1:1 → 2:1 → 3:1 → 3:2 → 3:3 → 4:3 → 4:4 → 5:4

Dieser Spielverlauf ist im Gitter abgebildet.



b) b1) Wie viele mögliche Spielverläufe mit Ausgang 5:4 gibt es?

b2) Wie viele mögliche Spielverläufe haben den Zwischenstand 3:2 und den Ausgang 5:4?

In der aktuellen Saison stehen dem FC Luzern 22 Spieler in vier Kategorien zur Verfügung: 7 Stürmer, 8 Mittelfeldspieler, 5 Verteidiger und 2 Torhüter.

c) Für ein Teambild werden alle Spieler in einer Reihe aufgestellt. Die Spieler der gleichen Kategorie sollen nebeneinander stehen. Gibt es mehr oder weniger als 50′000′000′000 Anordnungen?

d) Der Trainer Fabio Celestini stellt ein Team aus 4 Stürmern, 2 Mittelfeldspielern, 4 Verteidigern und 1 Torhüter zusammen. Die Spieler einer Kategorie werden nach Zufallsprinzip ausgewählt.

d1) Wie viele verschiedene Teams können auf diese Weise zusammengestellt werden?

d2) Zeigen Sie, dass sich der Mittelfeldspieler Pascal Schürpf mit Wahrscheinlichkeit 0.25 in einem solchen Team befindet.

d3) Wie oft sollte Fabio Celestini mindestens auf diese Weise ein Team zusammenstellen, damit Pascal Schürpf in mindestens einem der Teams mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% aufgestellt wird?

Es gibt Sportstatistiker, die im Fussball alles verfolgen und versuchen, sogenannte Fussballgesetze zu entdecken. Ein solches Gesetz für die Wahrscheinlichkeit $P(n)$, dass in einem Spiel genau n Tore geschossen werden, lautet:

$$P(n) = 0.045 \cdot \frac{3.1^n}{n!} \ .$$

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Spiel genau 2 Tore geschossen werden, ist $P(2) \approx 0.216$, also 21.6%.

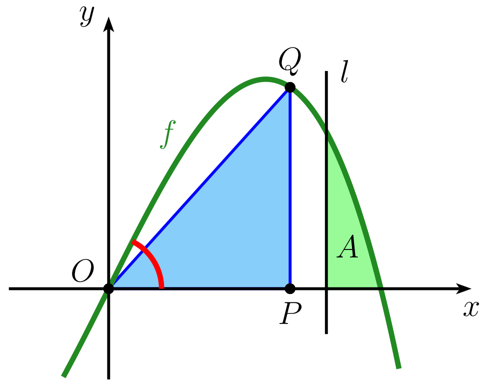
e) Berechnen Sie mit der Formel für $P(n)$ die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Spiel mindestens zwei Tore geschossen werden.

Die Wahrscheinlichkeit p, dass in einem Spiel 5 oder mehr Tore geschossen werden, ist 0.203. Jedes Jahr spielen Mattis und Sara folgendes Spiel: Falls in mindestens 41 der 180 Super-League-Spiele 5 oder mehr Tore pro Spiel geschossen werden, erhält Sara 30 Franken von Mattis. Falls nicht, erhält Mattis 10 Franken von Sara.

f) Bestimmen Sie, wer langfristig einen Gewinn erwarten kann.

	a	b	c	d	
Aufgabe 3: Analysis I	1	3	2	2	**8 Punkte**

Gezeichnet ist der Graph der Funktion $f(x) = -\frac{2}{9}x^3 + 2x$.



a) Unter welchem Schnittwinkel schneidet der Graph von f die x-Achse im Ursprung $O(0\,|\,0)$?

b) P auf der x-Achse, Q auf dem Graphen von f und der Ursprung O bilden ein rechtwinkliges Dreieck OPQ im 1. Quadranten.
Bestimmen Sie die beiden Koordinaten des Punktes Q so, dass das Dreieck maximalen Flächeninhalt hat.

c) Die Gerade $l : x = a$ ist parallel zur y-Achse. Zusammen mit dem Graphen von f und der x-Achse schliesst l das Flächenstück A mit dem Inhalt 0.5 ein.
Bestimmen Sie den Wert von a.

d) Die Parabel $p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + d$ berührt den Graphen von f im 1. Quadranten.
Bestimmen Sie den Wert von d.

Aufgabe 4: Analysis II — 3 Punkte

Ein Polynom 3. Grades h ist punktsymmetrisch mit dem Zentrum im Ursprung $O(0\,|\,0)$ und hat den Hochpunkt $H(4\,|\,16)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von h.

	a	b	c	d	e	
Aufgabe 5: Analysis III	1.5	1	4	2	3	**11.5 Punkte**

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x \cdot \sqrt{9 - x^2}$.

a) Zeigen Sie ausführlich: $f'(x) = \dfrac{9 - 2x^2}{\sqrt{9 - x^2}}$

b) Untersuchen Sie, ob f eine der beiden folgenden Gleichungen erfüllt:

$$f(-x) = f(x) \qquad \text{oder} \qquad f(-x) = -f(x)$$

Schliessen Sie dann daraus auf allfällige Symmetrien des Graphen von f.

c) Bestimmen Sie

- den Definitionsbereich
- die Nullstellen
- die Extremalpunkte (ohne Überprüfung der 2. Ableitung)

von f und nutzen Sie diese Informationen dann, um den Graphen von f in einem vollständigen Koordinatensystem zu zeichnen. *Einheiten: 2 Häuschen oder 1 cm.*

d) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cdot (9 - x^2)^{3/2}$$

eine Stammfunktion von f ist und berechnen Sie den Gesamtinhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse umschlossen wird. Lösen Sie unter Benutzung und Auswertung der Stammfunktion F.

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f bei der mittleren Nullstelle und zeichnen Sie diese Tangente ebenfalls ein.

Für $0 \leq x \leq 3$ wird die Fläche zwischen dem Graphen von f und der Tangente t um die x-Achse rotiert. Bestimmen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers. Stammfunktionen müssen nicht angegeben werden.

Lösungen:

Aufgabe 1:

a) a1) $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\begin{pmatrix} 7-(-6) \\ 2-(-6) \\ 2-14 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}\right|$

$= \sqrt{13^2+8^2+12^2} = \sqrt{377} = 19.42$ km

a2) $l_{AR}: \vec{r} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

schneiden mit der Wolkengrenze $\mathcal{W}$:

$(-6+6t) - 2(-6+5t) + 2(14-7t) - 16 = 0$

$-6 + 6t + 12 - 10t + 28 - 14t - 16 = 0$

$-18t + 18 = 0$

$t = 1 \quad \rightarrow \quad$ Schnittpunkt $S(0\,|-1\,|\,7)$

a3) Richtungsvektor $\vec{v}_{AR} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$, Normalenvektor $\vec{n}_{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Zwischenwinkel: $\cos(\beta) = \dfrac{\vec{v}_{AR} \cdot \vec{n}_{\mathcal{N}}}{|\vec{v}_{AR}| \cdot |\vec{n}_{\mathcal{N}}|} = \dfrac{6-10-14}{\sqrt{110}\cdot 3} = -\dfrac{6}{\sqrt{110}}$

$\rightarrow \quad \beta \approx 124.90°$

Winkel zwischen Flugbahn und Wolkengrenze: $\varphi = \beta - 90° \approx 34.90°$

b) Flugbahn Flugzeug: $l_{AR}: \vec{r} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

Flugbahn Helikopter: $l_H: \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

schneiden von l_{AR} und l_H: $\begin{array}{lrcl} (1) & -6+6t & = & 5+s \\ (2) & -6+5t & = & 9+2s \\ (3) & 14-7t & = & 6-s \end{array}$

Gleichungen (1) und (2) werden durch $s = -5$ und $t = 1$ gelöst.

Einsetzen in (3): $\quad 14 - 7 \neq 6 + 5 \quad \Rightarrow \quad$ Flugbahnen schneiden sich nicht

c) Ebene $\mathcal{E}$ parallel zur Wolkengrenze $\mathcal{W}$: $\quad \mathcal{E}: x - 2y + 2z + D = 0$

R einsetzen: $6 - 8 + 0 + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = 2 \quad \rightarrow \quad \mathcal{P}: x - 2y + 2z + 2 = 0$

d) Lot auf $\mathcal{W}$ durch R: $\quad n : \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$n \cap \mathcal{W}: \quad (6+t) - 2(4-2t) + 2(2t) - 16 = 9t - 18 = 0 \quad \to \quad t = 2$

Punkt U auf Wolkengrenze: $\quad U(8\,|\,0\,|\,4)$

Gesuchter Abstand: $\overline{RU} = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6$ km

e) Der Startraum S ist eine Ebene mit Stützpunkt $Q(2\,|\,2\,|\,0)$ und den Richtungsvektoren $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_S = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

<u>Lösung mit Parametergleichung:</u>

$S : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

B in S? $\quad \begin{pmatrix} 6.5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aus Gleichung für z-Komponente: $t = 0.5$

Aus Gleichung für y-Komponente: $3 = 2 + 2s - 0.5 \quad \to \quad s = 0.75$

Überprüfen mit Gleichung für x-Komponente: $6.5 = 2 + 3 + 1.5 \quad \checkmark$

B liegt im verbotenen Startraum.

<u>Lösung mit Koordinatengleichung:</u>

$S : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gleichungssystem: $\begin{array}{rcl} x &=& 2 + 2s + 3t \\ y &=& 2 + s - t \\ z &=& 2t \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{rcl} x &=& 2 + 2s + 3t \\ t &=& \frac{z}{2} \\ s &=& y - 2 + t = y - 2 + \frac{z}{2} \end{array}$

$x = 2 + 2(y - 2 + \frac{z}{2}) + \frac{3z}{2} = 2y + \frac{5z}{2} - 2 \quad \to \quad S : 2x - 4y - 5z + 4 = 0$

$B \in S$? $\quad 13 - 12 - 5 + 4 = 0 \quad \checkmark$

B liegt im verbotenen Startraum.

<u>Lösung mit Flugbahn des Flugzeugs:</u>

Flugzeug bewegt sich auf der Flugbahn $\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Testen, ob B auf der Flugbahn: $\begin{pmatrix} 6.5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

rechnerisch wie erster Lösungsweg

Aufgabe 2:

a) a1) Anzahl Ranglisten: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

a2) Anzahl Listen: $8 \cdot 3! = 48$

b) b1) Anzahl Spielverläufe: $\binom{9}{5} = 126$

b2) Anzahl Spielverläufe: $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = 60$

c) Anzahl Anordnungen: $4! \cdot (7! \cdot 8! \cdot 5! \cdot 2!) \approx 1.17 \cdot 10^{12}$

$1.17 \cdot 10^{12}$ ist grösser als $5 \cdot 10^{10}$.

d) d1) Anzahl Teams: $\binom{7}{4} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{5}{4} \cdot \binom{2}{1} = 9800$

d2) W'keit, Pascal Schürpf auszuwählen: $\dfrac{\binom{7}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{4}$

d3) n : Anzahl zusammengestellte Teams

$$\begin{aligned}
P(\text{Schürpf in mind. einem Team}) &\geq 0.95 \\
1 - P(\text{Schürpf in keinem Team}) &\geq 0.95 \\
1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n &\geq 0.95 \\
\left(\frac{3}{4}\right)^n &\leq 0.05 \\
n \cdot \ln\left(\frac{3}{4}\right) &\leq \ln(0.05) \\
n &\geq \frac{\ln(0.05)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 10.4
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ mindestens 11 Zusammenstellungen

e) $P(\text{mind. 2 Tore}) = 1 - P(0 \text{ Tore}) - P(1 \text{ Tor}) = 1 - 0.045 \cdot \frac{1}{1} - 0.045 \cdot \frac{3.1}{1} = 0.8155$

f) Binomialverteilung mit $n = 180$ und $p = 0.203$

$P(k \leq 40) = \sum_{k=0}^{40} \binom{180}{k} \cdot 0.203^k \cdot 0.797^{180-k} \approx 0.771$

$P(k \geq 41) = 1 - P(k \leq 40) \approx 1 - 0.771 = 0.229$

Erwartungswert für Mattis: $E \approx 0.771 \cdot 10 + 0.229 \cdot (-30) \approx 0.84$

Das Spiel lohnt sich für Mattis.

Aufgabe 3:

a) $f'(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2 \qquad f'(0) = 2$

Schnittwinkel: $\varphi = \arctan(2) \approx 63.43°$

b) $A(u) = \frac{1}{2} \cdot \overline{OP} \cdot \overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot \left(-\frac{2}{9}u^3 + 2u\right) = -\frac{1}{9}u^4 + u^2$

$A'(u) = -\frac{4}{9}u^3 + 2u$

Optimierung: $-\frac{4}{9}u^3 + 2u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}),\ (u_2 = 0),\ u_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$A(u_3)$ muss ein Maximum sein, da $A(u_2) = 0$ und $A(u_3) > 0$.

$Q(\frac{3\sqrt{2}}{2} \,|\, \frac{3\sqrt{2}}{2}) \approx (2.12 \,|\, 2.12)$

c) Nullstellen von f:

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(-\frac{2}{9}x^2 + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ oder $-\frac{2}{9}x^2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ oder $\frac{2}{9}x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ oder $x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ oder $x = \pm 3$

$F = \int_a^3 f(x)\,dx = \int_a^3 (-\frac{2}{9}x^3 + 2x)\,dx = \left(-\frac{1}{18}x^4 + x^2\right)\Big|_a^3$

$= -\frac{1}{18} \cdot 3^4 + 3^2 + \frac{1}{18}a^4 - a^2 = \frac{1}{18}a^4 - a^2 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad a^4 - 18a^2 + 72 = 0$

Die Lösung a mit $0 < a < 3$ ist $a = \sqrt{6} \approx 2.45$

d) Berührpunkt sei $B(u \,|\, v)$. Er ist auch Schnittpunkt.

$p'(u) = f'(u) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3}u = -\frac{2}{3}u^2 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}u^2 - \frac{1}{3}u - 2 = 0$
$\Leftrightarrow \quad (u_1 = -\frac{3}{2}), u_2 = 2$

$p(u) = f(u) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{6}u^2 + d = -\frac{2}{9}u^3 + 2u \quad \Leftrightarrow \quad d = -\frac{2}{9}u^3 + \frac{1}{6}u^2 + 2u$

mit $u = 2$: $\qquad d = \frac{26}{9}$

Aufgabe 4:

Da h punktsymmetrisch bzgl. $(0 \,|\, 0)$: $\quad h(x) = ax^3 + cx$

$h(4) = 64a + 4c = 16$
$h'(4) = 48a + c = 0$

GS lösen: $a = -\frac{1}{8}$, $c = 6 \quad \rightarrow \quad h(x) = -\frac{1}{8}x^3 + 6x$

Aufgabe 5:

a) Unter Verwendung von Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' \cdot \sqrt{9-x^2} + x \cdot \left(\sqrt{9-x^2}\right)' \\ &= 1 \cdot \sqrt{9-x^2} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \cdot (9-x^2)' \\ &= \sqrt{9-x^2} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \cdot (-2x) \\ &= \sqrt{9-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} \\ &= \frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}} \end{aligned}$$

b) $f(-x) = (-x) \cdot \sqrt{9-x^2} = -x \cdot \sqrt{9-x^2} = -f(x)$

$\rightarrow$ punktsymmetrisch zum Ursprung

c) $D = [-3, 3]$

Nullstellen: -3, 0 und 3

$f'(x) = \dfrac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \quad \Rightarrow 9 - 2x^2 = 0$

$\Rightarrow x_E = \pm\sqrt{\dfrac{9}{2}} = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \approx \pm 2.121$

$f(x_E) = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{9 - \dfrac{9}{2}} = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{9}{2}$

Extremalpunkte: $H(2.121 \,|\, 4.5)$, $T(-2.121 \,|\, -4.5)$

Graph: rechts

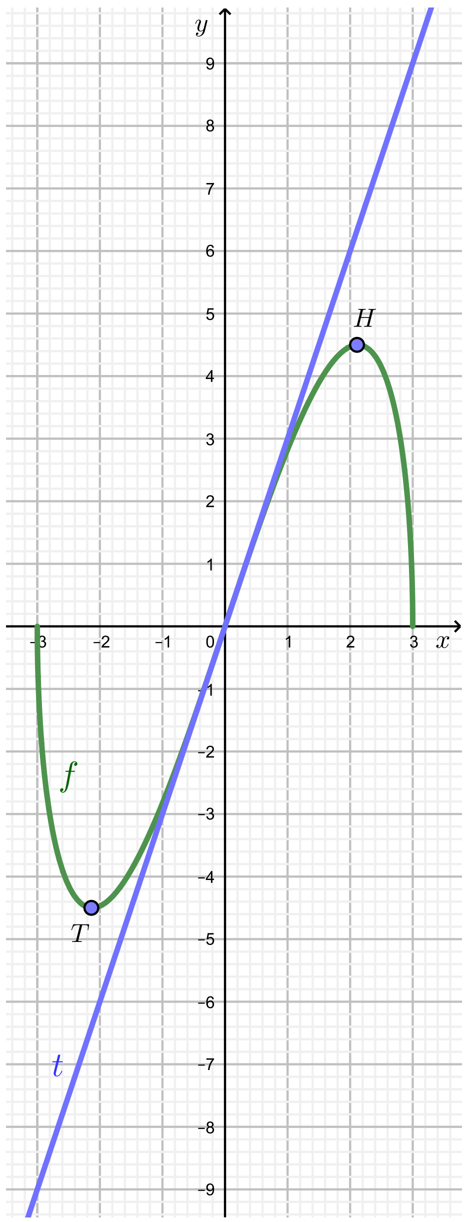
d) $F'(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (9-x^2)^{1/2} \cdot (-2x)$

$\quad = x \cdot (9-x^2)^{1/2} = f(x)$

Symmetrie von f kann ausgenutzt werden:

$A = 2 \cdot \int_0^3 f(x)\, dx = 2 \cdot (F(3) - F(0))$

$\quad = \frac{2}{3} \cdot 9^{3/2} = 18$



e) $f'(0) = \dfrac{9}{\sqrt{9}} = \dfrac{9}{3} = 3$

Tangente t: $\quad y - f(0) = 3 \cdot (x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = 3x$

$$V_{\text{aussen}} = \pi \int_0^3 (t(x))^2 \, dx = \pi \int_0^3 (3x)^2 \, dx = 9\pi \int_0^3 x^2 \, dx = 9\pi \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^3 = 81\pi$$

$$V_{\text{innen}} = \pi \int_0^3 (f(x))^2 \, dx = \pi \int_0^3 x^2 \cdot (9 - x^2) \, dx = \pi \int_0^3 (9x^2 - x^4) \, dx$$

$$= \pi \left(9 \cdot \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^3 = \pi \left(81 - \frac{243}{5} \right) = \frac{162}{5} \pi$$

$$V = V_{\text{aussen}} - V_{\text{innen}} = \left(81 - \tfrac{162}{5} \right) \pi = \tfrac{243}{5} \pi \approx 152.68$$