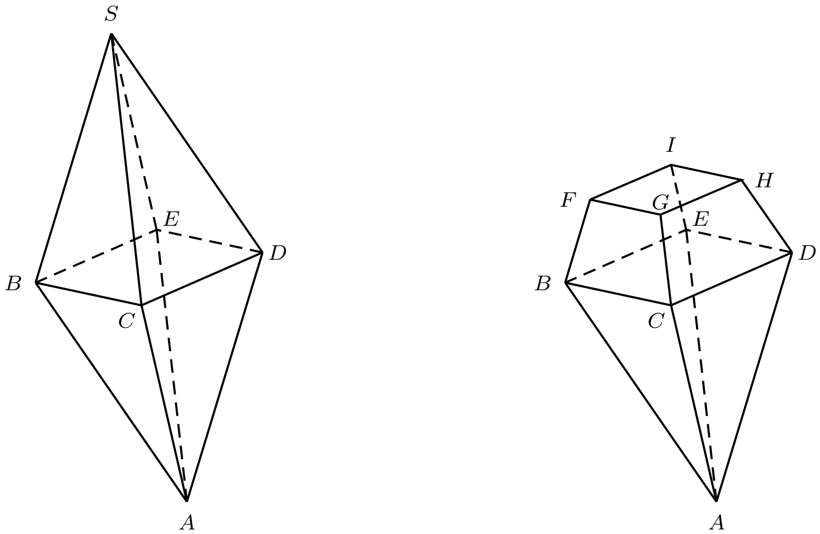
**Schriftliche Maturaprüfung 2020**
**Grundlagenfach Mathematik**

| | a | b | c | d | e | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Aufgabe 1: Vektorgeometrie** | 3 | 1.5 | 1.5 | 2.5 | 2.5 | **11 Punkte** |

Diamanten konnten lange Zeit nicht bearbeitet werden. Erst im 14. Jahrhundert wurden Diamanten poliert und zu Oktaedern $ABCDES$ geformt. Durch Abspalten oder Abschleifen der Oktaederspitze konnte ab dem 15. Jahrhundert eine grosse Fläche, die sogenannte Tafel, an der Oberseite erzeugt werden. Der dargestellte Körper ist somit zusammengesetzt aus einer geraden quadratischen Pyramide $ABCDE$ und einem Pyramidenstumpf $BCDEFGHI$.




Gegeben sind die Punkte $A(-4/11/7)$, $B(-1/2/4)$, $C(1/6/0)$, $D(5/8/4)$, $E(3/4/8)$ und $F(2/1/3)$.

a) Berechnen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $\varepsilon$, die durch die Punkte $B$, $C$ und $D$ verläuft. Zeigen Sie, dass auch der Punkt $E$ auf dieser Ebene $\varepsilon$ liegt.

b) Zeigen Sie, dass das Viereck $BCDE$ ein Quadrat ist.

c) Ursprünglich waren die beiden Pyramiden $ABCDE$ und $BCDES$ zueinander symmetrische gerade quadratische Pyramiden. Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze $S$.

Rechnen Sie weiter mit $S(8/-1/1)$.

d) Die Tafel $FGHI$ liegt parallel zum Quadrat $BCDE$. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $H$.

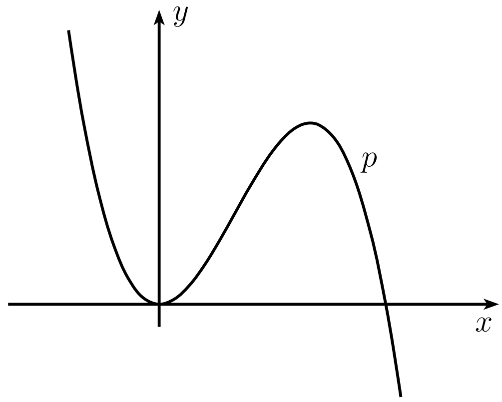
e) Um wie viel Prozent nimmt das Volumen des Diamanten durch das Abschleifen der Oktaederspitze ab (wie oben vom linken zum rechten Bild dargestellt)?

**Schriftliche Maturaprüfung 2020**
**Grundlagenfach Mathematik**

| | a | b | c | d | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Aufgabe 2: Analysis I** | 3.5 | 1.5 | 3.5 | 3.5 | **12 Punkte** |

a) Der Graph eines Polynoms $p$ dritter Ordnung berührt die $x$-Achse im Ursprung und schneidet die $x$-Achse an der Stelle $x = 3$. Der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von $p$ zwischen den beiden Nullstellen beträgt $F = 13.5$.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $p$.

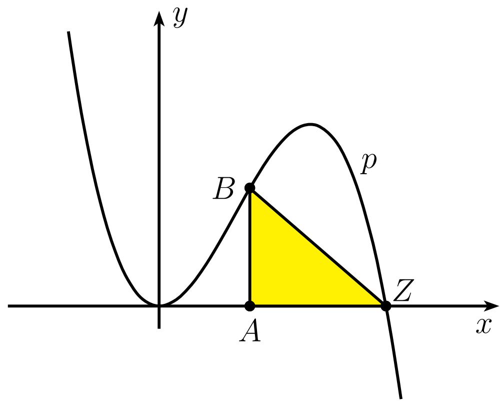



Rechnen Sie in den folgenden Teilaufgaben mit $p(x) = -2x^3 + 6x^2$.

b) Der Punkt $Q$ liegt auf dem Graphen von $p$ im 2. Quadranten. Der Graph von $p$ hat in $Q$ dieselbe Steigung wie in der Nullstelle $x = 3$. Berechnen Sie die Koordinaten von $Q$.

c) Die Punkte $A(u/0)$, $Z(3/0)$ und $B(u/p(u))$ bilden im 1. Quadranten das Dreieck $AZB$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes $B$ so, dass das Dreieck maximalen Flächeninhalt hat. Die Überprüfung des Maximums wird verlangt.




d) Wir betrachten das allgemeine Polynom $\bar{p}(x) = ax^3 + bx^2$. Die Punkte $\overline{Q}$ und $\overline{Z}$ liegen beide auf dem Graphen von $\bar{p}$, wobei $\overline{Q} \neq \overline{Z}$ gilt und $\overline{Z}$ diejenige Nullstelle von $\bar{p}$ ist, die nicht im Ursprung liegt. Der Graph von $\bar{p}$ hat in $\overline{Q}$ und $\overline{Z}$ dieselbe Steigung.

Geben Sie die $x$-Koordinate von $\overline{Q}$ abhängig von $a$ und $b$ an.

**Schriftliche Maturaprüfung 2020**
**Grundlagenfach Mathematik**

| | a | b | c | d | e | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Aufgabe 3: Analysis II** | 5 | 2 | 2 | 1.5 | 1.5 | **12 Punkte** |

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{3x^2 - 12x}{(x-1)^2}$ mit den Ableitungen

$$f'(x) = \frac{6(x+2)}{(x-1)^3}\ , \qquad f''(x) = \frac{-6(2x+7)}{(x-1)^4}\ , \qquad f'''(x) = \frac{36(x+5)}{(x-1)^5}\ .$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich, die Nullstellen, die Extrema, die Wendepunkte und die Asymptoten von $f$ und zeichnen Sie unter Verwendung der erhaltenen Punkte den Graphen von $f$. *Einheiten: 2 Häuschen oder 1 cm.*

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) = -6 \cdot \ln(x-1) + \frac{9}{x-1} + 3x + c$ eine Stammfunktion der Funktion $f$ ist.

c) Der Graph von $f$ und seine waagrechte Asymptote schliessen mit der vertikalen Geraden $x = 4$ ein nach rechts unbegrenztes Gebiet ein. Untersuchen Sie, ob dieses Gebiet einen endlichen Flächeninhalt hat oder nicht. Begründen Sie Ihre Antwort mit einer Rechnung.

d) Die Gerade $t$ ist die Tangente an den Graphen von $f$ an der Stelle $x = 7$. Zeigen Sie, dass $t$ durch den Ursprung verläuft.

e) Die Tangente $t$ von Aufgabe d), der Graph von $f$ und die $x$-Achse schliessen für $x \geq 0$ ein Flächenstück ein, das um die $x$-Achse rotiert. Finden Sie den Rauminhalt dieses Rotationskörpers mit Hilfe des Taschenrechners. Es muss keine Stammfunktion angegeben werden.

**Schriftliche Maturaprüfung 2020**
**Grundlagenfach Mathematik**

| | a | b | c | d | e | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Aufgabe 4: Stochastik** | 1.5 | 1 | 2 | 2.5 | 3 | **10 Punkte** |

Bei einem Pen-and-Paper-Rollenspiel schlüpfen die sechs Spieler einer Spielgruppe in die Rolle von fiktiven Helden.

a) Der Spielleiter hat sechs Karten mitgebracht, auf denen je ein Heldentyp abgebildet ist.

   a1) Zwei der Karten zeigen jeweils den gleichen Elfen, drei der Karten zeigen jeweils den gleichen Zwerg und eine der Karten zeigt eine Jägerin. Wie viele verschiedene Verteilungen der Heldentypen unter den sechs Spielern gibt es?

   a2) Die sechs Spieler kommen nacheinander zum Spielleiter. Wie viele verschiedene Reihenfolgen der Spieler gibt es?

Der Leiter der Gruppe hat drei identische Heiltränke zu verteilen.

b) Auf wie viele Arten kann er die Heiltränke unter den sechs Spielern verteilen, wenn

   b1) kein Spieler mehr als einen Heiltrank erhalten soll?

   b2) ein Spieler genau zwei Heiltränke erhalten soll?

Die Helden der Gruppe befinden sich auf einem Jahrmarkt. Dort dürfen sie mit Pfeil und Bogen auf ein Ziel aus Stoff schiessen. Ob der Held mit dem Schuss trifft, wird jeweils durch das Werfen eines Zwanzigerwürfels ermittelt. Die Jägerin weist im Bogenschiessen den Talentwert 13 auf, d.h. sie trifft das Ziel, wenn der Würfel einen Wert von 13 oder weniger anzeigt.

c) Wie oft muss sich die Jägerin beim Schiessen mindestens versuchen, um das Ziel mit einer Sicherheit von mindestens 99.9% mindestens einmal zu treffen?

d) Die Jägerin darf probehalber 5 Mal auf das Ziel schiessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

   d1) trifft sie das Ziel nie?

   d2) trifft sie das Ziel mindestens 3 Mal?

e) Nach dem Probeschiessen gilt es ernst: Nun geht es um Preisgeld. Die Jägerin darf so oft auf das Ziel schiessen, bis ihr der erste Fehlschuss unterläuft. Für jeden gelungenen Schuss erhält sie dann eine Silbermünze. Mehr als 5 Mal darf sie aber nicht schiessen.

   e1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht die Jägerin das Preisgeld von genau 3 Silbermünzen?

   e2) Wie viele Silbermünzen kann die Jägerin bei diesem Spiel erwarten?

# Lösungen:

**Aufgabe 1:**

a) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ , $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>ohne Vektorprodukt</u>

$$\varepsilon : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{llcl} (1) & x & = & -1+s+t \\ (2) & y & = & 2+2s+t \\ (3) & z & = & 4-2s \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \text{(2) - (1):} \quad \begin{array}{llcl} (4) & y-x & = & 3+s \\ (3) & z & = & 4-2s \end{array} \quad \rightarrow \quad (3)+2\cdot(4) : z+2y-2x = 10$$

$\rightarrow \qquad \varepsilon : 2x - 2y - z + 10 = 0$

<u>mit Vektorprodukt</u>

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \varepsilon : 2x - 2y - z + d = 0$$

(z.B.) $C(1/6/0)$ einsetzen: $2 - 12 - 0 + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = 10$

$\rightarrow \qquad \varepsilon : 2x - 2y - z + 10 = 0$

Punkt $E(3/4/8)$ einsetzen: $6 - 8 - 8 + 10 = 0$ ✓

b) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{ED}$ , $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BE}$

$|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}| = 6 \quad \rightarrow \quad BCDE$ ist Rhombus

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + (-4) \cdot 4 = 0 \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{CD}$

$\rightarrow \qquad BCDE$ ist Quadrat

c) Mittelpunkt von $BD$: $M(2/5/4)$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad S(8/-1/1)$$

d) Bilde die Ebene $\varepsilon'$ durch $F$, $G$, $H$ und $I$:

$\varepsilon' : 2x - 2y - z + d' = 0$

$F$ einsetzen: $4 - 2 - 3 + d' = 0 \quad \rightarrow \quad d' = 1 \quad \rightarrow \quad \varepsilon' : 2x - 2y - z + 1 = 0$

Schneide die Gerade $DS$ mit der Ebene $\varepsilon'$:

$$g_{DS} : \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$H(5 + t/8 - 3t/4 - t)$ einsetzen in $\varepsilon'$:

$2(5 + t) - 2(8 - 3t) - (4 - t) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9t - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$

$\rightarrow \quad H(6/5/3)$

e) wahrscheinlichste Schülerlösung:

Volumen des Oktaeders: $V_O = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot |\overrightarrow{BC}|^2 \cdot |\overrightarrow{MA}| = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 9 = 216$

Mittelpunkt des Quadrats $FGHI$: $M'(4/3/3)$

Diagonale: $\overrightarrow{FH} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Flächeninhalt des Quadrats $FGHI$: $A_{FGHI} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{FH}|^2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{32}\right)^2 = 16$

Höhe des Schliffes: $\overrightarrow{M'S} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |\overrightarrow{M'S}| = 6$

Volumen des Schliffes: $V_S = \frac{1}{3} \cdot A_{FGHI} \cdot |\overrightarrow{M'S}| = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 6 = 32$

Anteil des Schliffes am Oktaeder: $\frac{32}{216} \approx 0.1481$

Durch den Schliff verliert der Diamant 14.81% des Volumens.

Variante:

Die Aufgabe ist auch ohne den Punkt $H$ lösbar:

$$\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BS}$$

Verhältnis $\dfrac{|\overrightarrow{FS}|}{|\overrightarrow{BS}|} = \dfrac{2}{3}$

Volumen des Schnittes ist $\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0.1481$ des Volumens des Oktaeders.

**Aufgabe 2:**

a) $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$p(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = 0$

$p'(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 0 \quad \rightarrow \quad p(x) = ax^3 + bx^2$

$p(3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 27a + 9b = 0 \ \ (1)$

$F = \int_0^3 p(x)\,dx = \int_0^3 (ax^3 + bx^2)\,dx = \left(\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}bx^3\right)\Big|_0^3 = \frac{81}{4}a + 9b = 13.5 \ (2)$

Das GS [(1),(2)] hat die Lösung $a = -2$, $b = 6 \quad \rightarrow \quad p(x) = -2x^3 + 6x^2$

b) $p'(x) = -6x^2 + 12x \quad \rightarrow \quad p'(3) = -18$

Im Punkt $Q$ gilt:

$p'(x) = -6x^2 + 12x = -18 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-3)(x+1) = 0 \quad \rightarrow \quad Q_1(-1/8),\ Q_2(3/0)$

c) Dreiecksfläche:

$A(u) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AZ} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot (3-u) \cdot p(u) = \frac{1}{2} \cdot (3-u) \cdot (-2u^3 + 6u^2)$

$= \frac{1}{2} \cdot (2u^4 - 12u^3 + 18u^2) = u^4 - 6u^3 + 9u^2$

Ableitung: $A'(u) = 4u^3 - 18u^2 + 18u \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = 0, u_2 = \frac{3}{2}, u_3 = 3$

Da $A(0) = A(3) = 0$ und $A\left(\frac{3}{2}\right) > 0$, muss $A$ in $u = \frac{3}{2}$ maximal sein.

$\rightarrow \quad B\left(\frac{3}{2}/\frac{27}{4}\right)$

d) $\bar{p}(x) = x^2(ax + b)$

Nullstellen: $\bar{p}(x) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(ax+b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ oder $x = -\frac{b}{a}$

Steigung bei $x = -\frac{b}{a}$:

$\bar{p}'(x) = 3ax^2 + 2bx, \quad \bar{p}'\left(-\frac{b}{a}\right) = 3a\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 2b\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{3b^2}{a} - \frac{2b^2}{a} = \frac{b^2}{a}$

Im Punkt $\overline{Q}$ gilt: $\bar{p}'(x) = 3ax^2 + 2bx = \frac{b^2}{a} \quad \Leftrightarrow \quad 3a^2x^2 + 2abx - b^2 = 0$

Lösungsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-2ab \pm \sqrt{4a^2b^2 - 4 \cdot 3a^2 \cdot (-b^2)}}{6a^2} = \frac{-2ab \pm \sqrt{16a^2b^2}}{6a^2} = \frac{-2ab \pm 4ab}{6a^2}$$

$$x_1 = \frac{-2ab + 4ab}{6a^2} = \frac{2ab}{6a^2} = \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = \frac{-2ab - 4ab}{6a^2} = \frac{-6ab}{6a^2} = -\frac{b}{a} \text{ (die bereits bekannte Nullstelle)}$$

**Aufgabe 3:**

a) Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Nullstellen:

$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 12x = 3x(x-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 4$

Extrema:

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$

$f'(-2) = -\frac{2}{9} < 0 \quad \rightarrow \quad$ Hochpunkt $H(-2/4)$

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -6(2x+7) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{7}{2}$

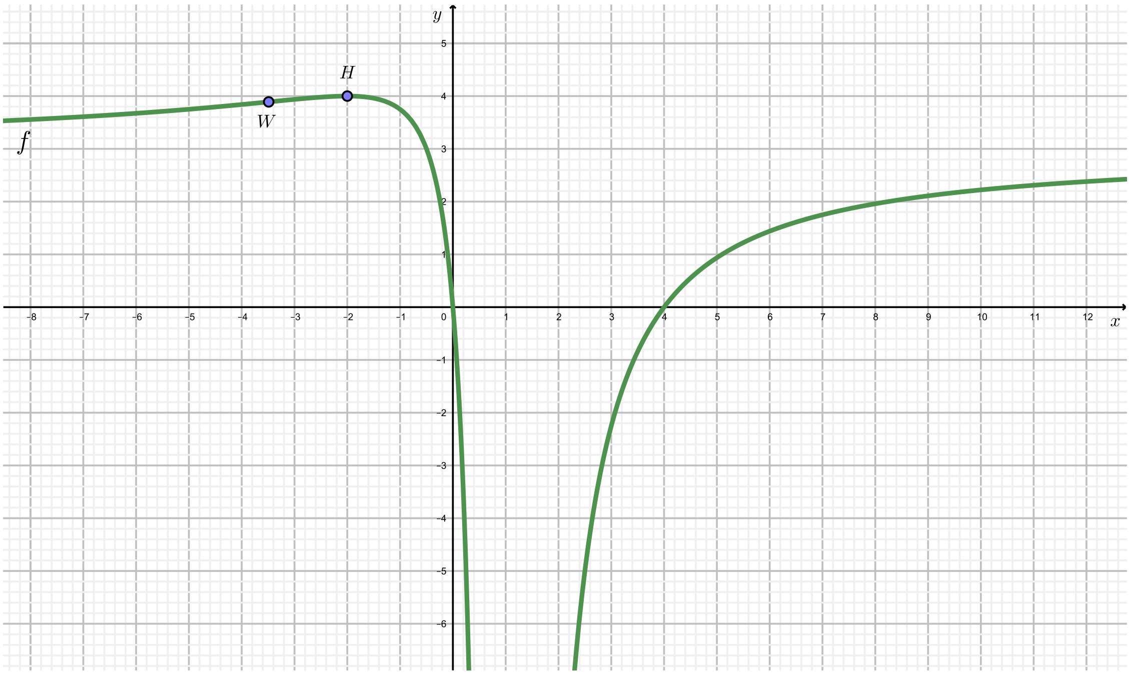
$f'''\left(-\frac{7}{2}\right) \approx -0.029 \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ Wendepunkt $W\left(-\frac{7}{2}/\frac{35}{9}\right)$

Asymptoten:

vertikal: $x = 1$ (Polstelle)

horizontal: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3x^2-12x}{(x-1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3x^2-12x}{x^2-2x+1} \cdot \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-\frac{12}{x}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 3$

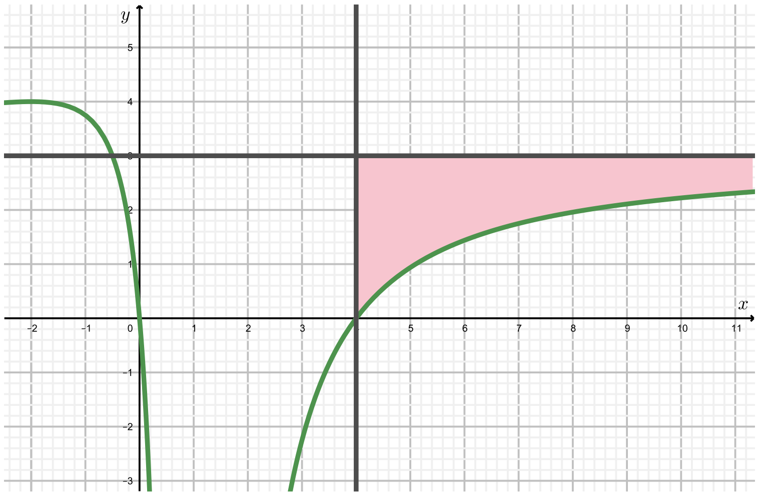
$\rightarrow \quad y = 3$




b) Anmerkung: Korrekterweise müsste im Funktionsterm von $F$ mit dem Betrag gearbeitet werden: $F(x) = -6 \cdot \ln|x-1| + \frac{9}{x-1} + 3x + c$. Um die Aufgabe nicht zusätzlich zu erschweren und da in der Teilaufgabe c) im Bereich $x \geq 1$ gearbeitet wird, wurde bewusst auf den Betrag verzichtet.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (-6 \cdot \ln(x-1))' + \left(\frac{9}{x-1}\right)' + (3x+c)' = -6 \cdot \frac{1}{x-1} - 9 \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + 3 \\
&= \frac{-6(x-1) - 9 + 3(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{-6x + 6 - 9 + 3x^2 - 6x + 3}{(x-1)^2} = \frac{3x^2 - 12x}{(x-1)^2} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

c)




$$\int_4^a (3 - f(x))\,dx = \left(3x - \left(-6\cdot\ln(x-1) + \frac{9}{x-1} + 3x\right)\right)\Bigg|_4^a$$
$$= \left(6\cdot\ln(x-1) - \frac{9}{x-1}\right)\Bigg|_4^a = 6\ln(a-1) - \frac{9}{a-1} - 6\cdot\ln(3) + 3$$

Da $\lim\limits_{a\to\infty} 6\cdot\ln(a-1) = \infty$, alle anderen Grenzwerte für $a \to \infty$ jedoch beschränkt sind, hat das Gebiet keinen endlichen Flächeninhalt.

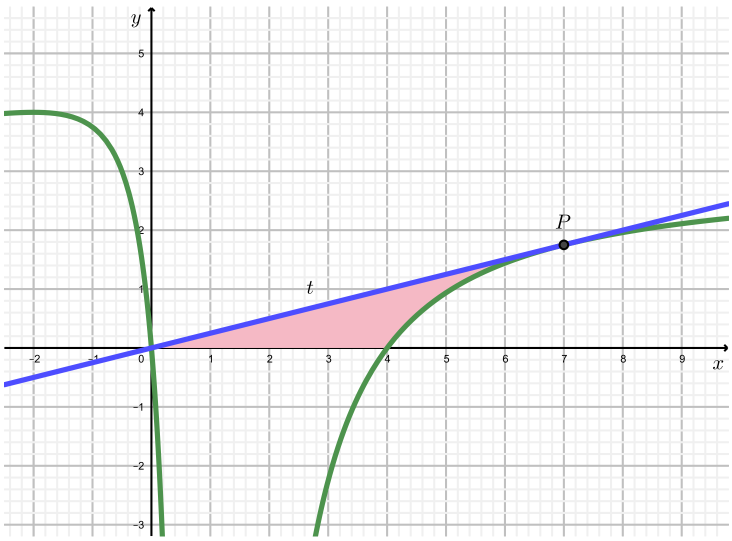
d) Tangente $t$ geht durch Punkt $P\left(7/\frac{7}{4}\right)$.

Steigung der Tangente: $f'(7) = \frac{6\cdot(7+2)}{(7-1)^3} = \frac{1}{4} = m$

Punkt-Steigungsformel:

$y - y_p = m(x - x_p) \quad \to \quad y - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}\cdot(x-7) \quad \to \quad t: y = \frac{1}{4}x$

Ordinatenabschnitt von $t$ ist $q = 0$.




e) Volumen des Rotationskörpers:

$$V = \pi\int_0^7 (t(x))^2\,dx - \pi\int_4^7 (f(x))^2\,dx = \pi\int_0^7 \frac{x^2}{16}\,dx - \pi\int_4^7 \frac{(3x^2-12x)^2}{(x-1)^4}\,dx$$
$$\approx 7.15\pi - 4.42\pi \approx 2.72\pi \approx 8.55$$

**Aufgabe 4:**

a) a1) Anzahl Verteilungen: $\frac{6!}{3!\cdot 2!} = 60$

a2) Anzahl Reihenfolgen: $6! = 720$

b) b1) Anzahl Verteilungen: $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 20$

b2) Anzahl Verteilungen: $\underbrace{6}_{\text{erhält 2 HT}} \cdot \underbrace{5}_{\text{erhält 1 HT}} = 30$

c) Es sei $n$ die Anzahl Schüsse.

$P(\text{mind. ein Treffer}) = 1 - P(\text{kein Treffer}) = 1 - 0.35^n \geq 0.999$

$\Leftrightarrow \quad 0.35^n \leq 0.001 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0.35^n) \leq \ln(0.001)$

$\Leftrightarrow \quad n \cdot \ln(0.35) \leq \ln(0.001)$

$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(0.001)}{\ln(0.35)} \approx 6.6$

Es sind also mindestens 7 Schüsse nötig.

d) d1) $P(X = 0) = 0.35^5 \approx 0.005$

d2) $P(X \geq 3) = \sum_{k=3}^{5} \begin{pmatrix} 5 \\ k \end{pmatrix} \cdot 0.65^k \cdot 0.35^{5-k} \approx 0.765$

e) e1) $P(Y = 3) = 0.65^3 \cdot 0.35 \approx 0.096$

e2) $\mu = \sum_{k=1}^{4} k \cdot 0.65^k \cdot 0.35 + 5 \cdot 0.65^5$

$= 0.35 \cdot (1 \cdot 0.65 + 2 \cdot 0.65^2 + 3 \cdot 0.65^3 + 4 \cdot 0.65^4) + 5 \cdot 0.65^5$

$\approx 1.64$

Die Jägerin kann ungefähr 1.64 Silbermünzen erwarten.

## Short Answers

### Exercise 1 [Vector Geometry]

a) $\mathcal{P}$. 2x – 2y – z + 10 = 0 insert point E → equation correct

b) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{ED}$ and $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BE}$ with $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = 6$ → BCDE is a rhombus

$\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{CD} = 0 \rightarrow \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{CD}$ → BCDE is a square

c) S(8/-1/1)

d) H(6/5/3)

e) volume of octahedron = 216 volume of the piece grinded-off = 32

loss of volume = 14.81%

### Exercise 2 [Calculus]

a) $p(x) = -2x^3 + 6x^2$ b) $Q_1$(-1/8), $Q_2$(3/0)

c) target function: $A(u) = \frac{1}{2} \cdot (3-u) \cdot p(u) = u^4 - 6u^3 + 9u^2$ has a maximum for $u = \frac{3}{2}$

$\rightarrow B\left(\frac{3}{2} / \frac{27}{4}\right)$

d) zeros: x = 0 or $x = -\frac{b}{a}$ $x_{\overline{Q}} = \frac{b}{3a}$

### Exercise 3 [Calculus]

a) domain $\underline{ID = \mathbb{R} \setminus \{1\}} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\}$

symmetry <u>no symmetry</u> (mixed exponents)

zeros zero <u>$Z_1$(0/0), $Z_2$(4/0)</u>

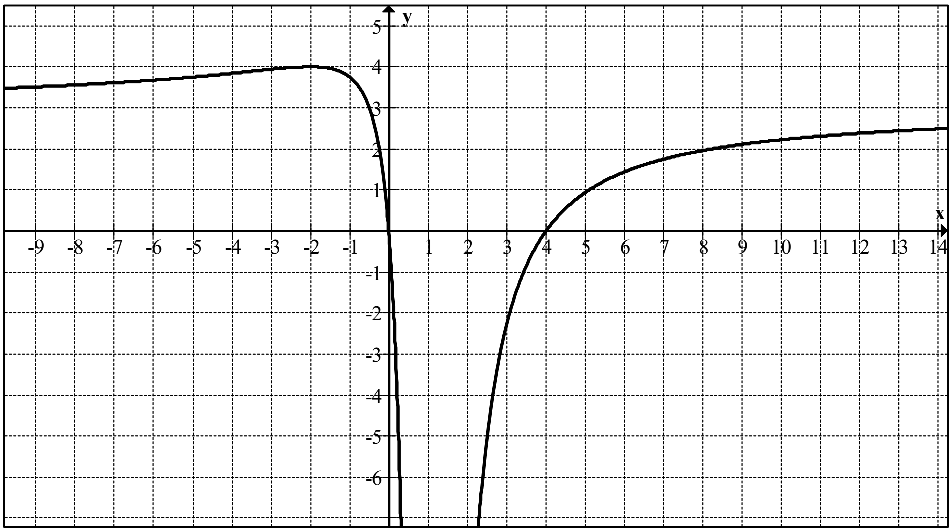
max/min high point <u>H(-2/4)</u>

inflection points inflection point $\underline{I\left(-3.5 / 3.\overline{8}\right)}$

asymptotes vertical: <u>x = 1</u> (cf. domain)

horizontal: <u>y = 3</u>

graph



b) by differentiation:

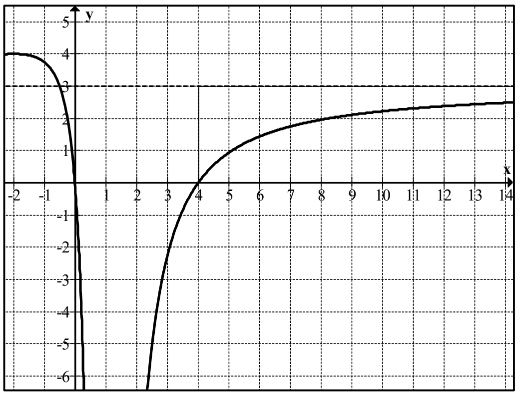
$$\underline{\underline{F'(x)}} = \frac{d}{dx}\left(-6\cdot\ln(x-1)+\frac{9}{x-1}+3x+c\right) = -6\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{9}{(x-1)^2}+3$$

$$= \frac{-6\cdot(x-1)-9+3(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{-6x+6-9+3x^2-6x+3}{(x-1)^2} = \underline{\underline{\frac{3x^2-12x}{(x-1)^2}}}$$

c) $\int_4^{\infty}(3-f(x))\,dx =$

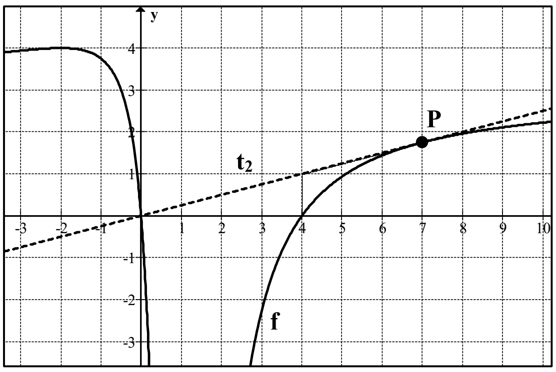
$$\left[3x-\left(-6\cdot\ln(|x-1|)+\frac{9}{x-1}+3x\right)\right]_4^{\infty}$$

$$= \lim_{u\to\infty}\left[6\cdot\ln(|u-1|)-\frac{9}{u-1}-(6\cdot\ln(3)-3)\right] = \infty$$



d) tangent in point $P\left(7/\frac{7}{4}\right)$: $t(x)=\frac{1}{4}x$,

so t passes through the origin




e) V = 8.55

## Exercise 4 [Stochastics]

a) $a_1$) 60 $a_2$) 720

b) $b_1$) 20 $b_2$) 30

c) P[at least one hit] = 1 – P[no hit] = $1 - 0.35^n \geq 0.999 \rightarrow n \geq 6.6 \rightarrow$ 7 shots

d) $d_1$) 0.005 $d_2$) 0.765

e) $e_1$) 0.096 $e_2$) 1.64 silver coins