KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2020

Fach	Mathematik Grundlagenfach
Prüfende Lehrpersonen	Christoph Arnold christoph.arnold@edulu.ch Patrik Hess patrik.hess@edulu.ch Stefan Müller stefan.mueller@edulu.ch Edoardo Sassone edoardo.sassone@edulu.ch
Klassen	6b, 6e, 6h, 7s
Prüfungsdatum	Freitag, 15. Mai 2020
Prüfungsdauer	180 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel	Formelbuch *„Formeln, Tabellen, Begriffe“* Taschenrechner TI-30X Pro ohne Handbuch
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. Jede Aufgabe soll auf einer neuen Seite begonnen werden und muss einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. Beschriften Sie jeden Bogen mit Ihrem Namen und der Ihnen zugeteilten Nummer.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 11 Aufgabe 2: 4 Aufgabe 3: 8 Aufgabe 4: 5.5 Aufgabe 5: 5.5 Aufgabe 6: 10 Total: 44 Für die Note 6 werden mindestens 40 Punkte benötigt.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	4

	a	b	c	d	e	f	**Punkte**
Aufgabe 1: Vektorgeometrie	2	1	1	2	2	3	**11**

Geben sind die drei Punkte $A(4/14/17)$, $B(16/11/14)$ und $C(16/2/23)$, sowie der Punkt $U(-10/4/16)$.

a) Beweisen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig-gleichschenklig ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D, der das Dreieck ABC zu einem Quadrat $ABCD$ ergänzt.

c) Wie lauten die Koordinaten des Quadratmittelpunktes M?

d) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Quadratebene E.

Wer in d) kein Resultat für E erhalten hat, rechne mit $x + 2y + 2z - 66 = 0$ *für E weiter.*

e) Ein Lichtstrahl geht von U aus und wird im Punkt M an der Quadratebene E reflektiert. Unter welchem Winkel trifft er auf die Ebene?

f) Der gespiegelte Lichtstrahl trifft im Punkt Z auf der xy-Ebene auf. Welche Koordinaten hat Z?

	Punkte
Aufgabe 2: Analysis	**4**

Gesucht ist eine Polynomfunktion f dritten Grades, die folgende Bedingungen erfüllt:
$W(1/-\frac{9}{5})$ ist Wendepunkt der Polynomfunktion f und die Gerade $g(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ schneidet den Graphen von f im Punkt $P(-2/?)$ senkrecht.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f.

	a	b	c	d	**Punkte**
Aufgabe 3: Analysis	1.5	1	1.5	4	**8**

$f(x) = -x^2 + 10x - 16$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f, sowie ihren Hochpunkt.

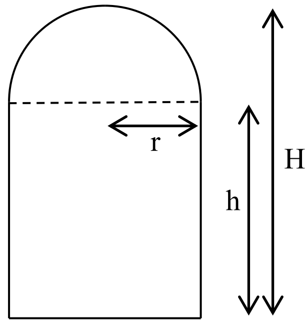
b) Skizzieren Sie den Graphen G_f von f.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt A_1 der Fläche, welche durch G_f und die x-Achse berandet wird.

d) Die Tangenten in den Kurvenpunkten $B_1(4/?)$ und $B_2(6/?)$ begrenzen zusammen mit G_f ein Flächenstück. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt A_2.

	a	b	Punkte
Aufgabe 4: Analysis	1.5	4	**5.5**

Auf einem Bauernhof soll ein Silo für Futterweizen gebaut werden, das die Form eines Kreiszylinders mit Boden und mit einer aufgesetzten Halbkugel hat, siehe Skizze im Querschnitt.



a) Welches Volumen besitzt ein derartiges Silo, wenn sein Durchmesser d = 2r = 5 m und seine Gesamthöhe H =12 m messen?

b) Das abgebildete Silo soll das Volumen 200 m^3 haben. Mit welchem Radius r muss das Silo gebaut werden, so dass der Oberflächeninhalt (mit Boden) minimal wird?

	a	b	Punkte
Aufgabe 5: Analysis	2.5	3	**5.5**

$f(x) = \frac{3}{2x+3}$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich sowie die Asymptoten von f und skizzieren Sie den Graphen mit den Asymptoten.

b) Der Graph von f, die waagrechte Asymptote und die y-Achse begrenzen im 1. Quadranten eine Fläche, die nach rechts ins Unendliche reicht. Diese Fläche rotiert um die waagrechte Asymptote. Zeigen Sie, dass der entstehende Rotationskörper ein endliches Volumen V hat, und bestimmen Sie das Volumen.

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 6: Stochastik	2	2	2	4	**10**

Anna und Beat hatten miteinander Eile mit Weile gespielt. Anna hat vielleicht das Spiel verloren, da sie ihre Spielfiguren oft nicht rechtzeitig ins Spiel bringen konnte, da ihr Spielwürfel einfach keine 5 lieferte. Sie meint: „Einmal hatte ich sicher zehnmal hintereinander keine 5, dann endlich kam die ersehnte 5“.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein fairer Spielwürfel zehnmal hintereinander keine 5 zeigt, aber beim elften Wurf dann eine 5 auftritt.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein fairer Spielwürfel bei genau zehnmaligem Würfeln mindestens einmal eine 5 zeigt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein fairer Spielwürfel bei zehnmaligem Würfeln genau siebenmal eine 5 zeigt.

d) Anna und Beat haben sich noch ein eigenes Spiel ausgedacht. Sie werfen zwei faire Spielwürfel und betrachten die geworfene Augensumme.
Sie vereinbaren, dass Anna an Beat 6 Franken bezahlt, wenn die Augensumme eine Primzahl grösser als 2 ist. Ist die Augensumme gerade, dann erhält Anna von Beat x Franken. Wenn die Augensumme weder gerade noch eine Primzahl ist, dann erhält Anna 3 Franken von Beat.
Wie müssen sie x wählen, damit das Spiel fair ist?

Musterlösung

Aufgabe 1: Vektorgeometrie

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = 9\sqrt{2}$ und $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ oder Pythagorassatz

b) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} \rightarrow D(4/5/26)$

c) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \rightarrow M(10/8/20)$

d) Parametergleichung, Parameter eliminieren $\rightarrow$ E : $x + 2y + 2z - 66 = 0$

Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder mit Vektorprodukt

e) $\overrightarrow{UM} = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, also Richtungsvektor Lichtstrahl g: $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$cos\varphi = \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}_g}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}_g|} \rightarrow \varphi \approx 54.74°$, $\alpha = 90° - \varphi \approx 35.26°$

f) Normale zu E durch U: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Durchstosspunkt mit $E \rightarrow t = 4$, Parameterwert verdoppeln $\rightarrow t = 8$
gespiegelter Punkt $U'(-2/20/32)$

$\overrightarrow{U'M} = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix}$, Gerade durch U' und M: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 20 \\ 32 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Durchstosspunkt mit xy-Ebene (z = 0) $\rightarrow$ t = 32, also $Z(30/-12/0)$

Aufgabe 2: Analysis

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$

$m_g \cdot m_t = -1 \Rightarrow m_t = 3$

$f(1) = a + b + c + d = -1.8$ (1)

$f''(1) = 6a + 2b = 0$ (2)

$f(-2) = -8a + 4b - 2c + d = 0 \quad (= g(-2))$ (3)

$f'(-2) = 12a - 4b + c = 3$ (4)

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{9}{5}x + \frac{2}{5}$$

Musterlösung

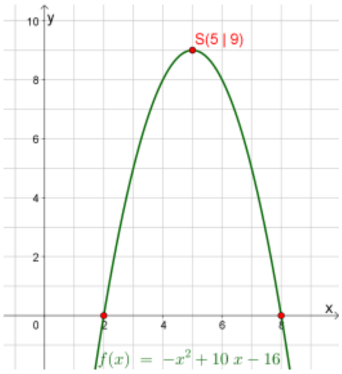
Aufgabe 3: Analysis

a) $f(x) = -x^2 + 10x - 16 = -(x^2 - 10x + 16) = \underline{-(x-2)(x-8)}$

Nullstellen: $\underline{\underline{x_1 = 2,\ x_2 = 8}}$

Hochpunkt $H\left(\frac{2+8}{2} / f\left(\frac{2+8}{2}\right)\right) = \underline{\underline{H(5/9)}}$ oder mit f' und f''

b)



c)

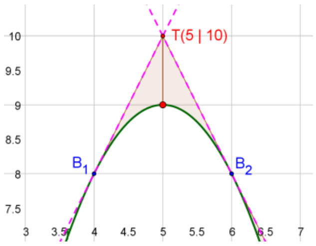
$$A_1 = \int_2^8 f(x)\,dx$$

$$= \int_2^8 \left(-x^2 + 10x - 16\right)dx \overset{\text{od. TR}}{=} \left[-\frac{x^3}{3} + 5x^2 - 16x\right]_2^8$$

$$= -\frac{8^3}{3} + 5\cdot 64 - 16\cdot 8 - \left(-\frac{8}{3} + 20 - 32\right) = \frac{64}{3} - \left(-\frac{44}{3}\right) = \underline{\underline{36}}$$

d)

$$f:\ y = f(x) = -x^2 + 10x - 16 \ \Rightarrow\ \underline{f'(x) = -2x + 10}$$



Tangenten t_1, t_2:

$B_1(4/8)$ $B_2(6/8)$

$t_1:\ \underline{\underline{y =}}\ f'(4)(x-4) + f(4) = 2(x-4) + 8 = \underline{\underline{2x}}$

$t_2:\ \underline{\underline{y =}}\ f'(6)(x-6) + f(6) = -2(x-6) + 8 = \underline{\underline{-2x + 20}}$

Flächeninhalt:

$$A_2 = 2\cdot\int_4^5 \left(t_1(x) - f(x)\right)dx = 2\cdot\int_4^5 \left(2x - \left(-x^2 + 10x - 16\right)\right)dx$$

$$= 2\cdot\int_4^5 \left(x^2 - 8x + 16\right)dx \overset{z.B.\ TR}{=} \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Musterlösung

Aufgabe 4: Analysis

a) r = 2.5 , h = 12 – 2.5 = 9.5 , $V = r^2\pi h + \frac{2}{3}r^3\pi \approx 219.26$ m³

b) $V = r^2\pi h + \frac{2}{3}r^3\pi \rightarrow h = \frac{V - \frac{2}{3}r^3\pi}{r^2\pi} = \frac{V}{r^2\pi} - \frac{2}{3}r$

$S = r^2\pi + 2r\pi h + 2r^2\pi = 3r^2\pi + 2r\pi h = 3r^2\pi + 2r\pi\left(\frac{V}{r^2\pi} - \frac{2}{3}r\right)$

$= \frac{5}{3}r^2\pi + \frac{2V}{r}$

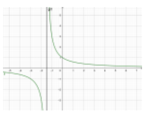
$S' = \frac{10}{3}r\pi - \frac{2V}{r^2} = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}} \approx 3.37$, h ≈ 3.37

Aufgabe 5: Analysis

a) $2x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$, also $x \neq -\frac{3}{2}$

$f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$, also x-Achse waagrechte Asymptote

$2x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$ senkrechte Asymptote



b) $V = \lim_{b\rightarrow\infty} \pi \int_0^b \left(\frac{3}{2x+3}\right)^2 dx$, falls Grenzwert existiert

$\int_0^b \left(\frac{3}{2x+3}\right)^2 dx = \left[\frac{-9}{2(2x+3)}\right]_0^b = \frac{-9}{2(2b+3)} - (-\frac{3}{2}) \rightarrow \frac{3}{2}$ für $b \rightarrow \infty$

also $V = \frac{3}{2}\pi$

Musterlösung

Aufgabe 6: Stochastik

a) $P\left(\underbrace{\cancel{5},\cancel{5},\cancel{5},\cancel{5},\cancel{5},\cancel{5},\cancel{5},\cancel{5},\cancel{5},\cancel{5}}_{10\text{ mal}},5\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\cdot\frac{1}{6}\approx\underline{\underline{2.69\%}}\qquad[2.6917597...\%]$

b)

$P(\text{"mindestens einmal eine 5"})=$

$1-P(\text{"keine 5"})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\approx\underline{\underline{83.85\%}}\,[83.84944...\%]$

c)

$X=$ Anzahl Fünfer $\quad X$ ist $B\left(10,\frac{1}{6}\right)$ – verteilt

$B\left(10,\frac{1}{6},7\right)=P(X=7)=\binom{10}{7}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{7}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{3}\approx\underline{\underline{0.0248\%}}$

d) Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensummen:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(1,1)	(1,2) (2,1)	(1,3) (2,2) (3,1)	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	(4,6) (5,5) (5,4)	(5,6) (5,5)	(6,6)
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

G sei der von Anna zu erwartende Gewinn. Bei einem fairen Spiel gilt G = 0.

Wahrscheinlichkeitsverteilung von G:

	AS ist gerade	AS Primzahl grösser 2	sonst, AS = 9
k	$x\ Fr.$	$-6\ Fr.$	$3\,Fr.$
$P(G=k)$	$2\cdot\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{12}+\frac{5}{36}\right)=\frac{1}{2}$	$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{9}=\frac{7}{18}$	$\frac{1}{9}$

$\mu=E(G)=x\cdot\frac{1}{2}-6\cdot\frac{7}{18}+3\cdot\frac{1}{9}=0\ \Rightarrow\ x=2\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{3}\right)=4$

Bei gerader Augensumme erhält Anna $\underline{\underline{4Fr.}}$ von Beat.