

Schriftliche Maturitätsprüfung 2020

Fach	Ergänzungsfach Anwendungen der Mathematik
Prüfende Lehrperson	Philipp Spindler philipp.spindler@edulu.ch
Klassen	6c, 6f, 6k
Prüfungsdatum	19. Mai 2020
Prüfungsdauer	3 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel	<ul style="list-style-type: none"> • Formelsammlung „Formeln, Tabellen, Begriffe“, DMK • „Mathematics Formulary“, Adrian Wetzel • Taschenrechner TI-30X Pro Multiview (ohne Handbuch)
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	<ul style="list-style-type: none"> • Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. • Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden und muss einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. • Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften. • Der Einsatz der Hilfsmittel ist klar anzugeben.
Anzahl erreichbarer Punkte	<p>Aufgabe 1: 9 Aufgabe 2: 7 Aufgabe 3: 8 Aufgabe 4: 6 Aufgabe 5: 9 <u>Aufgabe 6: 9</u> Total: 48</p> <p>Die Note 6 wird für mindestens 40 Punkte erteilt, die Note 4 für mindestens 23.5 Punkte.</p>
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	6

.....
Name, Vorname

.....
Klasse

.....
Nummer

Schriftliche Maturaprüfung 2020
Ergänzungsfach Anwendungen der Mathematik

	a	b	c	d	
Aufgabe 1: Vektorgeometrie	2	3	1	3	9 Punkte

Die drei Punkte $A(1/2/3)$, $B(2/4/14)$ und $C(11/1/8)$ bilden die Grundfläche eines schiefen dreieckigen Prismas.

- a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der dreieckigen Grundfläche.

Die Deckfläche DEF liegt parallel zur Grundfläche ABC . Der Abstand der beiden Flächen und damit die Höhe des Prismas ist $30\sqrt{3}$.

- b) Bestimmen Sie Koordinatengleichungen der beiden Ebenen ε und ε' , in welchen die Deckfläche DEF liegen kann.
- c) Weisen Sie nach, dass die Ecke $D(12/54/4)$ von der Grundfläche den angegebenen Abstand hat.
- d) Bestimmen Sie den Abstand der Ecke $D(12/54/4)$ von der Kante AB .

	a	b	
Aufgabe 2: Verschlüsselungstheorie	2.5	4.5	7 Punkte

Ihre Schulkollegin Eressa probiert das RSA-Verfahren zum Verschlüsseln von Zahlen aus.

- a) In einem ersten Versuch nimmt sie die Kennzahlen $n = 817$ und $E = 57$. Beim Ver- und Entschlüsseln verschiedener Zahlenwerte stellt sie fest, dass die Wahl von $E = 57$ nicht geeignet ist. Warum nicht? Schlagen Sie Eressa für das gegebene n alle zulässigen E zwischen 50 und 60 vor und begründen Sie Ihre Wahl.
- b) Eressa testet Ihre Hacker-Qualitäten. Sie hat eine Zahl K mit dem RSA-Verfahren verschlüsselt und die Zahl $\tilde{K} = 65$ erhalten. Für den Verschlüsselungsvorgang hat sie die Kennzahlen $n = 299$ und $E = 19$ verwendet.

Berechnen Sie die originale Zahl K . Den mod-Befehl des Taschenrechners dürfen Sie verwenden.

Schriftliche Maturaprüfung 2020
Ergänzungsfach Anwendungen der Mathematik

	a	b	c	d	e	
Aufgabe 3: Spieltheorie	1	2.5	1	1.5	2	8 Punkte

Zwei Tankstellen liegen an derselben Strasse einander gegenüber. Zusammen können sie pro Tag 10 000 Liter Benzin verkaufen. Die Tankstellenbesitzer kaufen Benzin für 1.45 Franken pro Liter ein und können es grundsätzlich (jeweils in Rappen-Schritten) zu höheren Preisen verkaufen.

Verlangt eine Tankstelle mehr als 1.50 Franken pro Liter, so kann sie kein Benzin mehr verkaufen.

Verlangen beide Tankstellen denselben Preis, so teilen sie sich den Markt.

Ist eine Tankstelle billiger, so kaufen alle Autofahrer bei dieser Tankstelle (10 000 Liter), während die andere Tankstelle nichts verkauft.

Eine Preisabsprache findet nicht statt. Die Gewinne für beide Tankstellen sind in folgender Tabelle dargestellt:

		1.5	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45
Preis Tankstelle A	1.5	250, 250	0, 400	0, 300	0, 200	0, 100	0, 0
	1.49	400, 0	200, 200	0, 300	0, 200	0, 100	0, 0
	1.48	300, 0	300, 0	150, 150	0, 200	0, 100	0, 0
	1.47	200, 0	200, 0	200, 0	100, 100	0, 100	0, 0
	1.46	100, 0	100, 0	100, 0	100, 0	50, 50	0, 0
	1.45	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0

Der Eintrag a, b bedeutet: Gewinn a (in Franken) für Tankstelle A, Gewinn b (in Franken) für Tankstelle B.

- Begründen Sie mit einer Rechnung die Einträge der Spielmatrix für das Feld mit den Strategien 1.48 für A und 1.49 für B.
- Prognostizieren Sie den Endzustand, der sich bei Anwendung der Strategie "wiederholte Elimination dominierter Zeilen / Spalten" einstellt, sofern ein solcher existiert. Auf dem Beiblatt ist die Gewinnmatrix mehrmals abgedruckt. Sie können diese Matrizen benutzen, um Ihr Vorgehen nachvollziehbar zu machen.
- Warum macht es bei diesem Spiel keinen Sinn, die Maximin-Strategie anzuwenden?
- Stattdessen könnten beide Tankstellen eine Maximax-Strategie fahren. Das ist eine sehr angriffige Strategie. Welcher Endzustand stellt sich ein, wenn beide Tankstellen diese Strategie anwenden?
- Finden Sie alle Nash-Gleichgewichte im vorliegenden Zwei-Personen-Spiel. Erläutern Sie ausführlich, wie Sie vorgehen. Nutzen Sie bei Bedarf die Matrizen auf dem Beiblatt.

Schriftliche Maturaprüfung 2020
Ergänzungsfach Anwendungen der Mathematik

	a	b	
Aufgabe 4: Komplexe Zahlen	3	3	6 Punkte

- a) Bestimmen Sie die komplexe(n) Lösung(en) der folgenden Gleichung ohne Taschenrechnerhilfe:

$$(2 + 3i) \cdot \bar{z} = \operatorname{Im}(7z) - 14 - i$$

- b) Die Gleichung

$$z^{12} + 32 + 32\sqrt{3}i = 0$$

hat Lösungen, die im 2. Quadranten der Gauss'schen Zahlenebene liegen. Bestimmen Sie diese in der Normalform.

	a	b	c	d	e	
Aufgabe 5: Populationsmodelle	2.5	1	1.5	2	2	9 Punkte

In einer Stadt mit 100 000 Einwohnern breitet sich ein brisantes Gerücht aus. Aktuell ($t = 0$) wissen erst 50 Stadteinwohner von dem Gerücht. Es ist jedoch davon auszugehen, dass derzeit die tägliche Ausbreitungsrate proportional zur Anzahl der Einwohner ist, die das Gerücht bereits kennen. Die zu dieser Modellannahme gehörende Funktion $I(t)$ zählt die Anzahl der Stadteinwohner zur Zeit t (in Tagen), die von dem Gerücht erfahren haben. Der Proportionalitätsfaktor λ wird auf 0.7 geschätzt.

- a) Geben Sie die zugehörige Differentialgleichung an und leiten Sie mit einer Separation der Variablen die Funktion $I(t)$ her.
- b) Unter Beibehaltung des Wachstumsmodells: Nach wie vielen Tagen hätte theoretisch die ganze Stadt von dem Gerücht erfahren?

Tatsächlich hat das Gerücht nach vier Tagen bereits 1000 Einwohner erreicht.

- c) Passen Sie die Funktion $I(t)$ an die tatsächliche Situation an.

Für die langfristige Modellierung der Gerüchtverbreitung wird besser auf das logistische Wachstumsmodell zurückgegriffen. Die zu diesem Modell gehörende Funktion $J(t)$ zählt wiederum die Anzahl der Stadtbewohner zur Zeit t (in Tagen), die von dem Gerücht erfahren haben.

- d) Bestimmen Sie die Funktion $J(t)$. Beachten Sie: Der Wert für λ muss neu angepasst werden.
- e) Wie lautet die logistische Differentialgleichung in der vorliegenden Situation? Benutzen Sie diese, um den **stündlichen** Zuwachs an Einwohnern, die das Gerücht kennen, nach vier Tagen zu prognostizieren, ohne jedoch auf den Funktionsterm von $J(t)$ aus Teilaufgabe d) zurückzugreifen. Verwenden Sie $\lambda \approx 7.5 \cdot 10^{-6}$.

Schriftliche Maturaprüfung 2020
Ergänzungsfach Anwendungen der Mathematik

	a	b	c	d	e	
Aufgabe 6: Statistische Tests	1	3.5	1	1.5	2	9 Punkte

Die beliebte wöchentliche Spielshow “2 gegen 50” hatte im letzten Jahr eine Einschaltquote von 40%. Da ein Wechsel der Moderatorin vollzogen werden muss, wird auch das Konzept der Sendung verändert.

Einen Monat nach der ersten Ausstrahlung der Spielshow mit neuem Konzept geben nur 70 von 200 zufällig ausgewählten Fernsehzuschauern an, die neue Sendung regelmässig sehen. Der Fernsehsender vermutet deshalb, dass sich der Marktanteil der Sendung verschlechtert hat.

- Formulieren Sie die Hypothesen in Worten und formal.
- Formulieren Sie den vollständigen, einseitigen statistischen Test. Definieren Sie die Testgrösse, Testverteilung, den Verwerfungsbereich und die Entscheidungsregel für ein Signifikanzniveau von 5%.
- Warum kann für keines der gängigen Signifikanzniveaus ausgesagt werden, der Marktanteil habe sich signifikant verschlechtert?
- In einem halben Jahr werden Umfragen aufzeigen, dass der Marktanteil der Spielshow auf 30% gesunken ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art beim vorliegenden Test.

Die Sendeleitung glaubt jetzt schon an einen Zuschauerschwund und möchte herausfinden, ob sich der Wechsel der Moderatorin negativ ausgewirkt hat. 150 Fernsehzuschauer, denen die Sendung bekannt ist, werden gefragt, welche der beiden Moderatorinnen sie besser finden. 67 entscheiden sich für die neue Moderatorin, die anderen 83 für die Vorgängerin.

- Weisen Sie nach, dass ein einseitiger Vorzeichentest die These “Die neue Moderatorin ist weniger beliebt als ihre Vorgängerin” auf dem Niveau 5% nicht signifikant stützt.

Schriftliche Maturaprüfung 2020
Ergänzungsfach Anwendungen der Mathematik

Beiblatt

Preis Tankstelle B

	1.5	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45
1.5	250, 250	0, 400	0, 300	0, 200	0, 100	0, 0
1.49	400, 0	200, 200	0, 300	0, 200	0, 100	0, 0
1.48	300, 0	300, 0	150, 150	0, 200	0, 100	0, 0
1.47	200, 0	200, 0	200, 0	100, 100	0, 100	0, 0
1.46	100, 0	100, 0	100, 0	100, 0	50, 50	0, 0
1.45	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0

Preis Tankstelle A

Preis Tankstelle B

	1.5	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45
1.5	250, 250	0, 400	0, 300	0, 200	0, 100	0, 0
1.49	400, 0	200, 200	0, 300	0, 200	0, 100	0, 0
1.48	300, 0	300, 0	150, 150	0, 200	0, 100	0, 0
1.47	200, 0	200, 0	200, 0	100, 100	0, 100	0, 0
1.46	100, 0	100, 0	100, 0	100, 0	50, 50	0, 0
1.45	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0

Preis Tankstelle A

Preis Tankstelle B

	1.5	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45
1.5	250, 250	0, 400	0, 300	0, 200	0, 100	0, 0
1.49	400, 0	200, 200	0, 300	0, 200	0, 100	0, 0
1.48	300, 0	300, 0	150, 150	0, 200	0, 100	0, 0
1.47	200, 0	200, 0	200, 0	100, 100	0, 100	0, 0
1.46	100, 0	100, 0	100, 0	100, 0	50, 50	0, 0
1.45	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0

Preis Tankstelle A

Preis Tankstelle B

	1.5	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45
1.5	250, 250	0, 400	0, 300	0, 200	0, 100	0, 0
1.49	400, 0	200, 200	0, 300	0, 200	0, 100	0, 0
1.48	300, 0	300, 0	150, 150	0, 200	0, 100	0, 0
1.47	200, 0	200, 0	200, 0	100, 100	0, 100	0, 0
1.46	100, 0	100, 0	100, 0	100, 0	50, 50	0, 0
1.45	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0

Preis Tankstelle A

Preis Tankstelle B

	1.5	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45
1.5	250, 250	0, 400	0, 300	0, 200	0, 100	0, 0
1.49	400, 0	200, 200	0, 300	0, 200	0, 100	0, 0
1.48	300, 0	300, 0	150, 150	0, 200	0, 100	0, 0
1.47	200, 0	200, 0	200, 0	100, 100	0, 100	0, 0
1.46	100, 0	100, 0	100, 0	100, 0	50, 50	0, 0
1.45	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0

Preis Tankstelle A