KANTON
LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2019

Fach	Mathematik Grundlagenfach
Prüfende Lehrperson	Daniel Muzzulini daniel.muzzulini@edulu.ch
Klassen	6h / 6i
Prüfungsdatum	24. Mai 2019
Prüfungsdauer	180 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel	„Formeln, Tabellen, Begriffe", DMK, DPK, DCK (2009) Taschenrechner TI-30X Pro
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden und muss einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. Beschriften Sie jeden Bogen mit Ihrem Namen und der Ihnen zugeteilten Nummer!
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 11 Aufgabe 2: 10 Aufgabe 3: 12.5 Aufgabe 4: 11.5 **Total: 45** Die Note 6 wird für 40 Punkte erteilt.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	5

……………………………………………………… ……………… ………………
Name, Vorname Klasse Nummer

Aufgabe 1 **Vektorgeometrie**	a	b	c	d	e	f	g	**Punkte**
	2	1	1	1	2	2	2	11

Gegeben sind die Punkte $A(10|5|13)$, $B(6|9|-3)$ und $M(2|1|5)$ sowie die Ebene $\mathcal{E}: 13x + 29y + 4z - 327 = 0$.

a. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $\mathcal{F}$, die die Punkte A, B und M enthält.

b. Zeigen Sie, dass das Dreieck ABM rechtwinklig gleichschenklig ist, mit rechtem Winkel bei M.

c. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte C und D, für die das Viereck ABCD ein Quadrat mit Mittelpunkt M ist.

d. Zeigen Sie, dass die Punkte A und B auf der Ebene $\mathcal{E}$ liegen.

Verwenden Sie im Folgenden den Normalenvektor $\overrightarrow{n_{\mathcal{F}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Ebene $\mathcal{F}$.

e. Der Punkt S liegt auf der Ebene $\mathcal{E}$ und er ist zugleich Spitze einer geraden quadratischen Pyramide ABCDS. Berechnen Sie die Koordinaten von S.

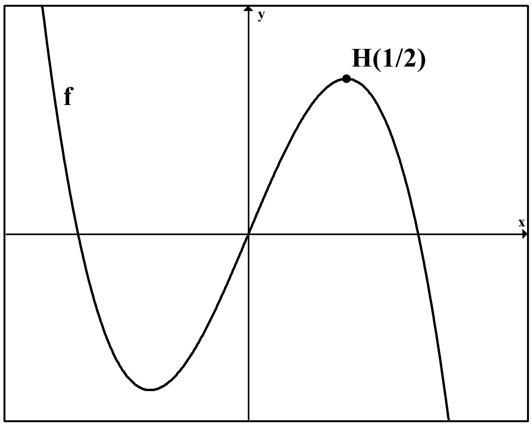
f. Berechnen Sie den Winkel zwischen der Grundfläche ABCD und der Seitenfläche ABS der Pyramide. *Hinweis*: Die Seitenfläche ABS der Pyramide ist in der Ebene $\mathcal{E}$ enthalten.

g. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCDS.

   Falls Sie in Teilaufgabe e. die Pyramidenspitze S nicht bestimmen konnten, verwenden Sie statt S den Ersatzpunkt $\hat{S}(16|-13|-2)$, der zusammen mit dem Quadrat ABCD ebenfalls eine gerade quadratische Pyramide definiert.

Aufgabe 2 Analysis	a	b	c	d	e	Punkte
	1	2	2	2	3	10

Wir betrachten die Funktion $f(x) = -x^3 + 3x$.



a. Bestimmen Sie die x-Koordinaten der Punkte auf dem Graphen von $f(x)$, in welchen der Graph von $f(x)$ die Steigung $m = -24$ hat.

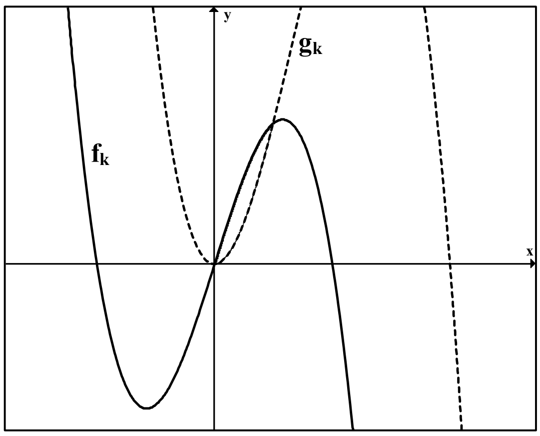
b. Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente des Graphen von $f(x)$.

c. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche vom Graphen von $f(x)$ und der Tangente im Hochpunkt H(1/2) von $f(x)$ begrenzt wird.

Wir betrachten nun die allgemeinere Funktion $f_k(x) = -x^3 + kx$ (*die oben betrachtete Funktion war ein Spezialfall für k = 3*).

d. Zeigen Sie, dass der y-Achsenabschnitt der Tangente t im Punkt $P(1/y_P)$ des Graphen von $f_k(x)$ nicht von k abhängt, indem Sie die Gleichung der Tangente t bestimmen.

e. Die Graphen der Funktionen $f_k(x)$ und $g_k(x) = -x^3 + kx^2$ mit $k > 0$ schliessen im ersten Quadranten eine Fläche ein. Für welchen Wert des Parameters k beträgt der Flächeninhalt $A = \frac{2}{3}$?



Aufgabe 3	a	b	c	d	e	f	Punkte
Analysis	3.5	2	1.5	1	1.5	3	12.5

Die Funktion $f(x)=(1-x)\cdot e^{x}$ und ihre ersten beiden Ableitungen sind gegeben:

$$f'(x)=-x\cdot e^{x} \qquad f''(x)=-(x+1)\cdot e^{x}.$$

a. Bestimmen Sie die Nullstellen, die Extrema sowie die Asymptoten von $f(x)$. Zeichnen Sie schliesslich den Graphen von $f(x)$. *Einheiten*: 2 Häuschen oder 1cm.

b. Bestimmen Sie die Gleichung der quadratischen Funktion $g(x)=ax^2+bx+c$, welche an der Stelle $x=0$ im Funktionswert sowie im Wert der ersten und zweiten Ableitung mit $f(x)$ übereinstimmt.

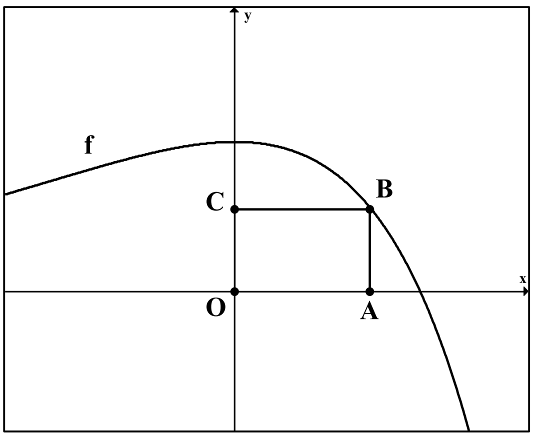
Falls Sie $g(x)$ nicht bestimmen konnten, rechnen Sie weiter mit $g(x)=-\frac{1}{3}x^2+1$.

c. Der Teil des Graphen von $g(x)$, welcher oberhalb der x-Achse liegt, rotiert um die x-Achse und bildet dadurch einen Rotationskörper. Berechnen Sie das Volumen dieses Rotationskörpers.

d. Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x)=(2-x)\cdot e^{x}$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

e. Der Graph von $f(x)$, die negative x-Achse und die positive y-Achse schliessen eine Fläche ein, welche sich nach links ins Unendliche erstreckt. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche unter Verwendung der Stammfunktion aus Teilaufgabe d.

f. Der Graph von $f(x)$ sowie die positive x-Achse und die positive y-Achse begrenzen eine Fläche. In diese Fläche wird das Rechteck OABC einbeschrieben, wobei O(0/0) der Koordinatenursprung ist, A auf der positiven x-Achse, B auf dem Graphen von $f(x)$ und C auf der positiven y-Achse liegt (*siehe Skizze rechts*). Für welchen Punkt A besitzt das Rechteck OABC den maximalen Flächeninhalt?
Die Überprüfung des Maximums mit der 2. Ableitung wird nicht verlangt.



<table>
<tr><td rowspan="4">Aufgabe 4
Wahrscheinlichkeitsrechnung</td><td>a_1</td><td>a_2</td><td>b_1</td><td>b_2</td><td rowspan="2">Punkte</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>1</td><td>0.5</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>b_3</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td rowspan="2">11.5</td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>2.5</td><td>2</td><td>2</td></tr>
</table>

Am Jahrmarkt hat es einen Stand mit drei Eimern. Die Aufgabe ist es, Bälle in die Eimer zu werfen. Ein Treffer in den grössten Eimer gibt einen Punkt, ein Treffer in den mittleren Eimer gibt vier Punkte, ein Treffer in den kleinsten Eimer ergibt neun Punkte; sonst gibt es null Punkte. Für jeden Ball, den man wirft, zahlt man einen Franken.

Chiara kauft wiederholt fünf Bälle, ihr Freund Daniel notiert sich jeweils das Wurfergebnis in folgender Form: «9 0 9 4 1», «0 4 9 9 1» oder «9 0 9 1 0».

a. Wie viele verschiedene Wurfergebnisse mit fünf Bällen gibt es
   - a_1. generell?
   - a_2. wenn genau zwei Bälle im kleinsten Eimer landen?

Die Wahrscheinlichkeit, dass Chiara in den grössten Eimer trifft, beträgt 30%, die Wahrscheinlichkeit, dass sie in den mittleren Eimer trifft, beträgt 20% und die Wahrscheinlichkeit, dass sie in den kleinsten Eimer trifft, beträgt 10%.

b. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Chiara bei fünf geworfenen Bällen
   - b_1. in keinen Eimer trifft?
   - b_2. nur genau einmal in einen Eimer trifft?
   - b_3. mindestens drei Mal trifft?

c. Wie viele Bälle müsste Chiara mindestens werfen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens einmal in den kleinen Eimer trifft?

Je nach geworfenen Punktzahlen gibt es verschiedene Preise. Den grossen Teddybären erhält man für 100 Punkte.

d. Wie viel kostet es Chiara im Schnitt, den grossen Teddybären zu gewinnen?

Die Standbetreiberin will das Spiel leicht verändert anbieten: Bei einer Benefizgala darf man jeden Ball so lange werfen, bis er in einem Eimer landet.

e. Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass Chiaras fünf Bälle alle im gleichen Eimer landen?

Schriftliche Maturitätsprüfung 2019

Lösungen

Aufgabe 1

a.

$$\overrightarrow{MA}=\begin{bmatrix}8\\4\\8\end{bmatrix},\quad \overrightarrow{MB}=\begin{bmatrix}4\\8\\-8\end{bmatrix},\quad \overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}=\begin{bmatrix}-96\\96\\48\end{bmatrix}=-48\cdot\begin{bmatrix}2\\-2\\-1\end{bmatrix}$$

$F:\quad 2x-2y-z+d=0$

$M\in F:\quad 2\cdot 2-2\cdot 1-5+d=0\quad\rightarrow\quad d=3$

$F:\quad 2x-2y-z+3=0$

Oder

$$F:\quad \vec{r}=\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}\qquad \begin{aligned}x&=2+2t+s\\y&=1+t+2s\\z&=5+2t-2s\end{aligned}\qquad \begin{aligned}y-2x&=-3-3t\\y+z&=6+3t\end{aligned}$$

$-2x+2y+z=3\qquad F:\quad 2x-2y-z+3=0$

b.

$\overline{MA}=\overline{MB}=12,\quad \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\quad /\quad \overline{AB}=12\sqrt{2}=\sqrt{12^2+12^2}$

c.

$$\overrightarrow{r_C}=\overrightarrow{r_M}-\overrightarrow{MA}=\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8\\4\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\-3\\-3\end{bmatrix}\qquad \overrightarrow{r_D}=\overrightarrow{r_M}-\overrightarrow{MB}=\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4\\8\\-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-7\\13\end{bmatrix}$$

$C(-6\,|-3\,|-3),\; D(-2\,|-7\,|\,13)$

d.

$13\cdot 10+29\cdot 5+4\cdot 13-327=0\quad\rightarrow\quad A\in E$

$13\cdot 6+29\cdot 9+4\cdot(-3)-327=0\quad\rightarrow\quad B\in E$

e.

$$h:\quad \vec{r}=\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}2\\-2\\-1\end{bmatrix}$$

$\{S\}=h\cap E:\quad 13\cdot(2+2t)+29\cdot(1-2t)+4\cdot(5-t)-327=0$

$-36t-252=0\quad\rightarrow\quad t=-7\quad\rightarrow\quad S(-12\,|\,15\,|\,12)$

f.

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{bmatrix} 13 \\ 29 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{n_F} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\left|\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{n_F}\right|}{\left|\overrightarrow{n_E}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_F}\right|} = \frac{\left|13 \cdot 2 + 29 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1)\right|}{\sqrt{13^2 + 29^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-36|}{\sqrt{1026 \cdot 3}} \approx 0.3746\,,$$

$\varphi \approx 67.998°$

g.

$$\left|\overrightarrow{MS}\right| = 21, \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = 12\sqrt{2}, \quad V = \tfrac{1}{3} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{MS}\right| = \tfrac{1}{3} \cdot 288 \cdot 21 = 2016$$

Oder:

$$V = 4 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB}\right) \cdot \overrightarrow{MS}\right| = \tfrac{2}{3} \cdot \left\| \begin{bmatrix} -96 \\ 96 \\ 48 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -14 \\ 14 \\ 7 \end{bmatrix} \right\| = 2016$$

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot \left|\left(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{MS}\right| = \left\| \left(\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 16 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -12 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} -14 \\ 14 \\ 7 \end{bmatrix} \right\| = \tfrac{1}{3} \cdot \left\| \begin{bmatrix} 192 \\ -192 \\ -96 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -14 \\ 14 \\ 7 \end{bmatrix} \right\| = 2016$$

Mit Ersatzpunkt: gleiches Volumen.

Aufgabe 2

a. $f(x) = -x^3 + 3x \rightarrow f'(x) = -3x^2 + 3 = -24 \rightarrow -3x^2 = -27 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow \underline{\underline{x = \pm 3}}$

b. Wendepunkt: $f(x) = -x^3 + 3x \qquad f'(x) = -3x^2 + 3 \qquad f''(x) = -6x = 0 \rightarrow \underline{x = 0}$

überprüfe: $f'''(x) = -6 \neq 0 \rightarrow \underline{W(0/0)}$

Wendetangente: $m_t = f'(0) = 3 \rightarrow \underline{w(x) = 3x}$

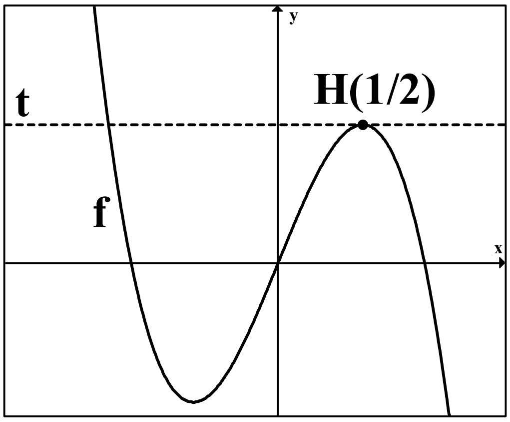
c. Tangente in H: $t(x) = 2$

Schnittpunkt von t und f: $x = -2$

$$A = \int_{-2}^{1} \left(t(x) - f(x) \right) dx$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(2 + x^3 - 3x \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} = \underline{\frac{27}{4}}$$



d. $f_k(x) = -x^3 + kx \rightarrow f_k'(x) = -3x^2 + k$ mit $\underline{m_t} = f_k'(1) = -3(1)^2 + k = \underline{k-3}$

$\underline{y_p} = f_k(1) = -(1)^3 + k \cdot (1) = \underline{k-1} \rightarrow \underline{P(1/k-1)}$

$k - 1 = t(1) = m_t \cdot x + q = (k-3)(1) + q = k - 3 + q \rightarrow \underline{q = 2} \rightarrow \underline{\underline{t(x) = (k-3)x + 2}}$

Die Tangente schneidet die y-Achse an der Stelle $q = 2$.

e. Schnittpunkte: $f_k(x) = g_k(x) \rightarrow -x^3 + kx = -x^3 + kx^2 \rightarrow \cancel{k}x = \cancel{k}x^2$

$x = x^2 \rightarrow \underline{x = 0;1}$

Eingeschl. Fläche: $A = \int_0^1 \left(f_k(x) - g_k(x) \right) dx = \int_0^1 \left(\cancel{-x^3} + kx + \cancel{x^3} - kx^2 \right) dx$

$$= k \cdot \int_0^1 \left(x - x^2 \right) dx = k \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = k \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = \frac{k}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow \underline{\underline{k = 4}}$$

Aufgabe 3

a. Nullstellen: $f(x) = (1-x)\cdot e^x = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \underline{N(1/0)}$

Extrema: $f'(x) = -x\cdot e^x = 0 \rightarrow \underline{x = 0}$

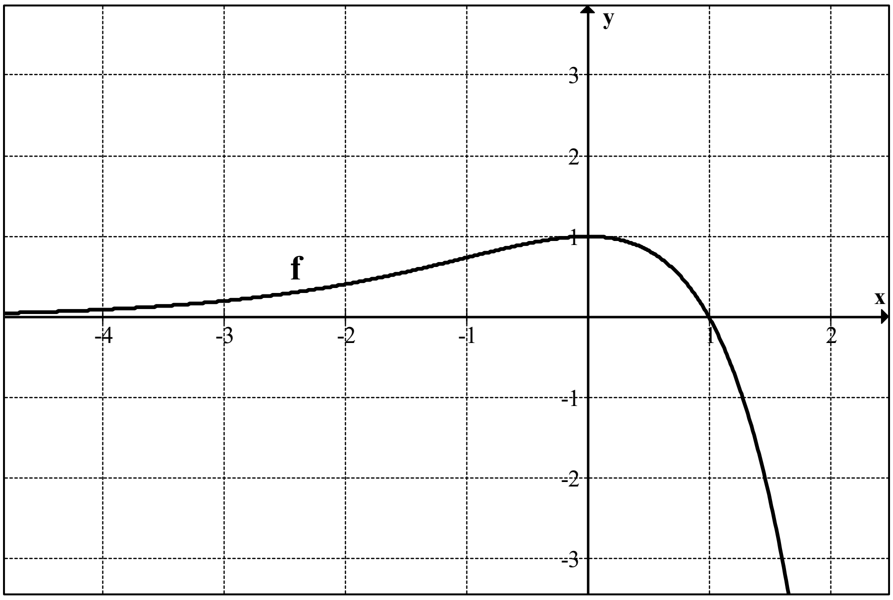
Nachweis: $f''(0) = -(0+1)\cdot e^0 = -1 \rightarrow \text{Max} \rightarrow \underline{H(0/1)}$

Asymptoten: keine vertikalen bzw. schiefe Asymptoten

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left((1-x)\cdot e^x\right) = -\infty \rightarrow$ keine Asymptote

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left((1-x)\cdot e^x\right) = 0 \rightarrow \underline{y = 0}$ als horizontale Asymptote

Graph:



b. $g(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad g'(x) = 2ax + b$ $\quad g''(x) = 2a$

Bedingungen:

$g(0) = f(0) \rightarrow c = 1$

$g'(0) = f'(0) \rightarrow b = 0$

$g''(0) = f''(0) \rightarrow 2a = -1 \quad \rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$

$$\underline{\underline{g(x)}} = -\frac{1}{2}x^2 + 1$$

c. $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1 = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 2\right) = 0 \rightarrow \underline{x = \pm\sqrt{2}}$

$$V = \pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} g^2(x)dx = \pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(-\frac{x^2}{2}+1\right)^2 dx = 2\pi\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(-\frac{x^2}{2}+1\right)^2 dx = \frac{2\pi}{4}\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(x^4 - 4x^2 + 4\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 4x\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{8\sqrt{2}}{3} + 4\sqrt{2} - 0\right) = \underline{\underline{\frac{16\sqrt{2}\,\pi}{15}}} \approx 4.7391$$

Mit Ersatzfunktion:

$g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 1 = -\frac{1}{3}\left(x^2 - 3\right) = 0 \rightarrow \underline{x = \pm\sqrt{3}}$

$$V = \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} g^2(x)dx = \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(-\frac{x^2}{3}+1\right)^2 dx = 2\pi\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(-\frac{x^2}{3}+1\right)^2 dx = \underline{\underline{\frac{16\sqrt{3}\,\pi}{15}}} \approx 5.8042$$

d. $\underline{\underline{F'(x)}} = \frac{d}{dx}\left[\left(2-x\right)\cdot e^x\right] = \left(-1\right)\cdot e^x + \left(2-x\right)\cdot e^x = -e^x + 2e^x - x\cdot e^x = e^x - x\cdot e^x = \underline{\underline{\left(1-x\right)\cdot e^x}}$

e. $\underline{\underline{A}} = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{0} f(x)dx = \lim_{u\to-\infty}\left[\left(2-x\right)\cdot e^x\right]_u^0 = \lim_{u\to-\infty}\left(2\cdot e^0 - \left(2-u\right)\cdot e^u\right) = \underline{\underline{2}}$

f. Koordinaten von A(u/0)

Zielfunktion (ZF) Fläche = $A = \overline{OA}\cdot\overline{AB} = u\cdot f(u)$

Nebenbedingung (NB): nicht nötig

Angepasste ZF: $A(u) = u\cdot f(u) = u\cdot\left(1-u\right)\cdot e^u = \underline{\left(u-u^2\right)\cdot e^u}$

$$A'(u) = \left(1-2u\right)\cdot e^u + \left(u-u^2\right)\cdot e^u = \left(1-u-u^2\right)\cdot e^u = 0$$

$$\rightarrow 1-u-u^2 = 0 \rightarrow \underline{u = 0.62;\ \cancel{-1.62}}$$

<u>Für den Punkt A(0.62/0) besitzt das Rechteck OABC die maximale Fläche.</u>

Aufgabe 4 Wahrscheinlichkeitsrechnung

a. a1. $4^5 = 1024$

a2. $\binom{5}{2} \cdot 3^3 = 270$

b. b1. $P(\text{in kein Eimer wird getroffen}) = (0.4)^5 = 1.024\%$

b2. $P(\text{nur genau einmal in Eimer treffen}) = \binom{5}{1}\ 0.6 \cdot (0.4)^4 = 7.68\%$

b3. $P(\text{mindestens drei Mal treffen}) = \sum_{k=3}^{5} \binom{5}{k}\ 0.6^k \cdot 0.4^{5-k} = 68.256\%$

c. $P(\text{mind. einmal den kleinen Eimer treffen}) \geq 0.95$ mit dem Gegenereignis operieren:

$P(\text{nie den kleinen Eimer treffen}) < 0.05$

$$(0.9)^n < 0.05 \quad |\ln$$

$$n \cdot \ln(0.9) < \ln(0.05)$$

$$n > \frac{\ln(0.05)}{\ln(0.9)} \approx 28.43 \Rightarrow 29 \text{ Bälle}$$

d. X_i : Punktzahl bei Ereignis i $\qquad p_i$: Wahrscheinlichkeit von Ereignis i

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i \cdot X_i = 0.4 \cdot 0 + 0.3 \cdot 1 + 0.2 \cdot 4 + 0.1 \cdot 9 = 2$$

Der Erwartungswert bei diesem Spiel ist 2 Punkte. Das heisst, man müsste 50 Mal spielen, das heisst im Schnitt kostet es 50 Franken, den Hauptpreis zu gewinnen.

e. Neue Wahrscheinlichkeiten: $P(\text{kleinen Eimer treffen}) = 0.1\overline{6} = \frac{1}{6}$,

$P(\text{mittleren Eimer treffen}) = 0.\overline{3} = \frac{1}{3}$,

$P(\text{grossen Eimer treffen}) = 0.5 = \frac{1}{2}$

$$P(\text{alle fünf Bälle in denselben Eimer}) = \left(\frac{1}{6}\right)^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{23}{648} \approx 3.55\%$$